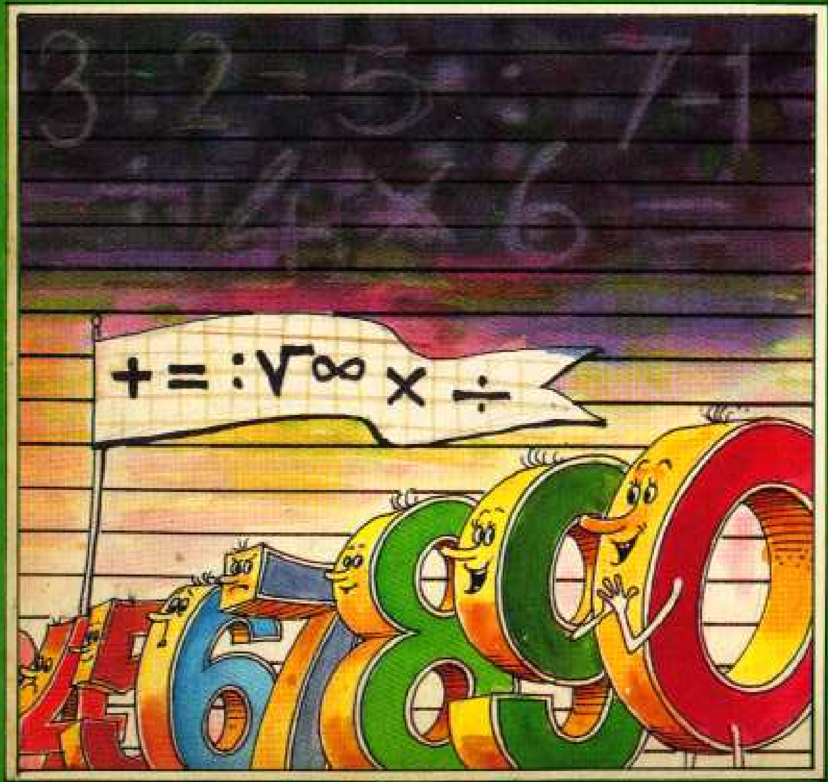
కాలెండరుతో అంకెలసరదా

పి.కె. శ్రీనివాసన్



కాలెండరుతో అంకెల సరదా

(11-14 సంవత్సరాల పిల్లలకు)

పి. కె. శ్రీనివాసన్

తెలుగు

అనురాధ సంపత్ కుమార్

బాలసాహితి

ప్రచురణ సంఖ్య : 3

ప్రతులు : 1000

వెల : **10/-**

మొదటి ముద్రణ : మార్చి 1990

Translation to
'NUMBER FUN WITH A CALENDAR'

Alarsri, Door No 20, Street No 25,
T. G. Nagar, Madras 600 061.

కవర్‌డిజైన్ : గంగాధర్

వివరాలకు :

బాలసాహితి

2-1-1/5, నల్లకుంట, హైదరాబాద్-500 044.

ముద్రణ : హైదరాబాదు ప్రింటర్స్, హబ్సిగూడ, హైదరాబాదు

కాలెండరు 1990

జనవరి

ఆ.	సో.	మ.	బు.	గు.	శు.	శ.
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

ఫిబ్రవరి

ఆ.	సో.	మ.	బు.	గు.	శు.	శ.
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28			

మార్చి

ఆ.	సో.	మ	బు.	గు.	శు.	శ.
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

ఏప్రిల్

ఆ.	సో.	మ.	బు.	గు.	శు.	శ.
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

మే

ఆ.	సో.	మ.	బు.	గు.	శు.	శ.
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

జూన్

ఆ.	సో.	మ.	బు.	గు.	శు.	శ.
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

జూలై

ఆ.	సో.	మ.	బు.	గు.	శు.	శ.
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

ఆగష్టు

ఆ.	సో.	మ.	బు.	గు.	శు.	శ.
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

సెప్టెంబరు

ఆ.	సో.	మ.	బు.	గు.	శు.	శ.
30						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29

అక్టోబరు

ఆ.	సో.	మ	బు.	గు.	శు.	శ.
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

నవంబరు

ఆ	సో.	మ.	బు.	గు.	శు.	శ.
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

డిసెంబరు

ఆ.	సో	మ.	బు.	గు.	శు.	శ.
30	31					1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29

విషయ సూచిక

1.	మాతో కలవండి	1
2.	క్షణంలోనే సగటు - కూడకుండా మొత్తం	3
3.	తమాషా దీర్ఘ చతురస్రాలు	10
4.	అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రాలు	13
5.	కూడిక గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు	19
6.	నక్షత్రపు గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు	23
7.	పూర్తి తమాషా చతురస్రాలు	27
8.	నిలువు వరుసల మొత్తం ఆట	48
9.	వారం, తేదీ	55
10.	కొన్ని గణితరూపాలు	65
11.	పారిభాషిక పదజాలం	81

రచయిత పరిచయం

శ్రీ పి.కె. శ్రీనివాసన్ 1924 నవంబర్ 4న మద్రాసులో పుట్టారు. ఆయన చదువంతా మద్రాస్‌లోనే కొనసాగింది. 1947లో మద్రాసు విశ్వవిద్యాలయం నుండి గణిత శాస్త్రంలో పట్టాపొందారు. 1948 లో బాచిలర్ ఆఫ్ టీచింగ్ పట్టాపొందారు. వెనువెంటనే ఉపాధ్యాయునిగా ఉద్యోగం పొంది నాలుగేళ్ళ పాటు కోయంబత్తూరులోని గ్రామీణ ఉన్నత పాఠశాలలో గణితం బోధించారు. 1952 నుండి 1975 వరకు మద్రాసులోని ముత్తియల్ పెట్ ఉన్నత పాఠశాలలో పనిచేశారు. 1959 లో ఎం.ఇ.డి. చేశారు. ముత్తియల్ పేట్‌లో పనిచేస్తున్నప్పుడు ఒక సంవత్సరం అమెరికాలోనూ, రెండు సంవత్సరాలు, న్యూఢిల్లీలోని ఎన్.సి.ఇ.ఆర్.టి లోను పనిచేశారు. 1976-79 మధ్య నైజీరియాలో సీనియర్ ఫెడరల్ ఎడ్యుకేషన్ ఆఫీసరుగా, 1979-81 మధ్య స్టేట్ ఎడ్యుకేషన్ కళాశాలలో సీనియర్ లెక్చరర్‌గా ఉన్నారు.

గణితంపట్ల ఆసక్తితో, పాఠశాలల మధ్య అనేక ఆటల పోటీలు ప్రారంభించారు. మాథమెటిక్స్ క్లబ్బులు మొదలుపెట్టారు. వీటిని ఇప్పటికీ ప్రభుత్వ సంస్థలు నిర్వహిస్తున్నాయి. అన్ని స్థాయిలలో గణిత ఉపాధ్యాయులకు పునశ్చరణ తరగతులు నిర్వహించారు. 1981లో పదవీ విరమణ చేసినప్పటి నుండీ గణిత బోధనలో సలహాదారుగా ఉన్నారు.

1968లో రామానుజన్ గురించి ఎవ్వరూ ఎరగని విషయాలను తెలుపుతూ "రామానుజన్ మెమోరియల్ నంబర్స్" అన్న పుస్తకాన్ని రెండు భాగాలుగా ప్రచురించారు. శ్రీ శ్రీనివాసన్ ఇంగ్లీషు, తమిళ భాషల్లో ఎన్నో గణిత పాఠ్య పుస్తకాలూ, అనుబంధ పుస్తకాలూ రాశారు. ఆయన గణితంపై రాసిన అనేక వ్యాసాలు గణిత శాస్త్ర సంబంధ పత్రికలలోనే కాక 'ది హిందూ', 'దిన వాణి' (తమిళం) దిన పత్రికలలో వెలువడ్డాయి.

'గణిత బోధన అంతర్జాతీయ సదస్సు'లో ఆయన పూర్తిస్థాయి సభ్యులు. 1972 నుండీ నాలుగు సంవత్సరాలకు ఒకసారి జరిగే ఈ సంస్థ సమావేశాలకు ఇంగ్లండు, పశ్చిమ జర్మనీ, అమెరికా, ఆస్ట్రేలియా, హంగరీ దేశాలు వెళ్ళి వచ్చారు.

ఎనిమిది సంవత్సరాల వయస్సులోనే పిల్లలకి బీజగణితం పరిచయం చేయవచ్చని శ్రీ శ్రీనివాసన్ అభిప్రాయం. 1988 ఆగస్టులో డెన్మార్క్, స్వీడన్, నార్వే, ఫిన్‌లాండ్ దేశాలను సందర్శించి తన అభిప్రాయాన్ని ప్రతిపాదించి ఆచరణలోకి తీసుకు రాగలిగారు.

భారతదేశంలో "గణితబోధకుల సంఘ" స్థాపక సభ్యులు. ప్రస్తుతం దీనికి అకడమిక్ సెక్రటరీగా పనిచేస్తున్నారు. రామానుజం జన్మశతాబ్దికి గుర్తుగా ఈ సంస్థ వెలువరించిన పుస్తకం (**Teachers instructional Guides on introduction to creativity, of Ramanujan**) ఆయనే రాశారు. మద్రాసులోని 'రామానుజన్ ఇన్‌స్టిట్యూట్ ఆఫ్ అడ్వాన్స్‌డ్ స్టడీ ఇన్ మాథెమెటిక్స్'లో యు.జి.సి. ఏర్పాటు చేసిన 'పాఠశాల అభివృద్ధి కేంద్రం'లో సభ్యులుగా ఉన్నారు. '(**Romping in number land**', '**why Maths Club**', '**Innovative Approches in Mathematics Education**' అన్న జనరంజక గణిత పుస్తకాలను ప్రచురించారు.

ముందు మాట

కొత్త సంవత్సరం మొదలుకావటంతోనే, చిన్న పిల్లలనుండి వయసు మళ్ళిన వారి వరకు కొత్త కాలెండరు కోసం వేట మొదలవుతుంది. ఎక్కువ కాలెండర్లు ఉన్నవారిన్ని చూసి మిగిలిన వారు అసూయ పడుతుంటారు.

ఇళ్ళలో, అంగళ్ళలో, బడుల్లో, ఆఫీసుల్లో కాలెండర్లు ఉంటాయి. ఏడు అడ్డ వరుసల్లో లేదా నిలువు వరుసల్లో ఉండే తారీకుల అమరిక అందరికీ పరిచయమే. కానీ వీటిలో ఇమిడి ఉన్న అద్భుత విషయాలు అంతగా తెలియవు.

కాలెండరులోని తారీకుల అమరికలోని అద్భుత విషయాలు పిల్లలకు పరిచయం చేసి గణితంలో అభిరుచిని పెంచటానికి ఈ పుస్తకం ఒక కొత్త మార్గం అవుతుంది. సాధారణంగా దొరికే వస్తువులలో అద్భుతమైన సంఖ్యల అమరికను చూడగలిగితే పిల్లలకు గణితంపట్ల ఆసక్తి పెరుగుతుంది. ఇష్టంగా లెక్కలు నేర్చుకోడానికి దోహదం చేస్తుంది. పిల్లలను పసితనం నుంచే గణిత శాస్త్రం వైపుకు ఆకర్షించటానికి ఎంతో తోడ్పడుతుంది. కూడికలూ, హెచ్చవేతలూ వచ్చి ఉంటే చాలు. కాలెండరులోని ఈ అంకెల సరదాలో పిల్లలు పాలు పంచుకోవచ్చు.

ఈ పుస్తకం వివిధ వయసుల (11-14 సంవత్సరాలు) వారికి అనుకూలంగా ఉంటుంది. వారి స్థాయిని బట్టి సిద్ధాంతాలను అవగాహన చేసుకోగలుగుతారు.

సంభాషణ విధానం పిల్లలను తక్షణం ఆకట్టుకుంటుంది. వారి ఊహాత్మక శక్తిని ప్రోత్సహిస్తుంది. అందుకే ఈ పద్ధతిని ఈ పుస్తకంలో అవలంభించాను. సాధారణంగా మనదేశంలో పఠనాభిరుచి ఉన్నా, చదవటానికి ఏమీ లేక తమ అభిరుచిని కోల్పోతుంటారు. నా అనుభవంలో పుస్తకంలో సంభాషణ విధానం అభిరుచి ఉన్నవారిని కార్యశూరులుగానూ, కార్యశూరుల్ని నిపుణులు గానూ మలుస్తుంది. గణిత శాస్త్రంలో నైపుణ్యం ఉన్నపిల్లలు ఈ కంప్యూటర్ల యుగంలో ఎంతయినా అవసరం.

వీడియో తీయటానికి, టీ.వీ లో ప్రసారానికి అనువుగా ఈ పుస్తకం రూపొందించాను. కాలెండరు ద్వారా ఆట రీతిలో గణితాన్ని ఆనందించటంలోని విశిష్టతను గణిత శాస్త్రంలో పరిచయమున్న ఎవరైనా ఇట్టే గ్రహిస్తారు. ఈ పుస్తకాన్ని తెలుగులోకి అనువాదం చేసిన నా కోడలు శ్రీమతి అనురాధ సంపత్ కుమార్‌కు ధన్యవాదాలు.

మద్రాసు
జనవరి, 1990

పి. కె. శ్రీనివాసన్

1. మాతో కలవండి

నా పేరుమధు. 9 వ తరగతి చదువుతున్నాను. నా తమ్ముడు రవి 7 వ తరగతి, చెల్లి సుధ 5 వ తరగతి చదువుతున్నారు.

మా నాన్నగారు బట్టల వ్యాపారం చేస్తారు. ఆదివారాలు మాతో గడపడమంటే ఆయనకెంతో ఇష్టం. ఆయన ప్రతి వస్తువులోనూ గణితం చూస్తారు. దానివల్ల మాకు గ్లాసులు, బెల్టు, కాగితపు ముక్క, గళ్ళ కాగితం, రైలు టిక్కట్లు వంటివాటితో సరదాగా లెక్కలుకడుతూ ఆడుకోవటం అలవాటు. ఈ ఆటల వల్ల మాకు గణితం పట్ల ఆసక్తి పెరిగింది.

మేము ఏ వస్తువు తీసుకువెళ్ళినా సరే దానితో ఆటలు కనిపెట్టి మమ్మల్ని ఆశ్చర్యచకితుల్ని చేసేవారు. ఏ ఆటలోనైనా సరే గణితం లేకుండా ఉండదన్న విషయం ఆయన వల్ల మాకు తెలిసింది.

సంక్రాంతి సెలవలు ఆడుతూ పాడుతూ గడుపుతున్నాం. కొత్త సంవత్సరం క్యాలెండర్లు (calendar) వచ్చాయి. కాలెండరుతో ఏవైనా ఆటలు సృష్టించగలరేమోనని "తేదీల అమరికలో ఏమైనా తమాషా వుందా?" అని అడిగాం. ఇక సెలవలన్నీ కాలెండర్‌లోని తమాషా లెక్కలతో గడిచిపోయాయి.

నాన్న ఒకటి రెండు సూచనలిచ్చి అద్భుతమైన విషయాల్ని కనుక్కోండని మాకే వదిలి వేసేవారు.

కాలెండర్‌తో సరదాగా ఆడుకుంటూ కనుగొన్న ఎన్నో విషయాలు మీ ముందుంచుతున్నాం. మాతో కలసి ఆ ఆనందాన్ని పంచుకోండి.

నాన్న మా పలకలు తీసుకు రమ్మన్నారు. సుధ పలక మీద కింది విధంగా అంకెలు వేశారు.

					1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31				

కాలెండరులోని ఏ నెలలోనైనా ఈ విధంగా తారీకులుంటాయేమో చెప్పమన్నారు. మేము కాలెండరు చూసి చెప్పాలనుకున్నాం. ఇంతలోనే కాలెండరు చూడకుండా చెప్పాలన్నారు.

మొదటి వంతు సుధది. తనకుతెలియదు అంది. వారానికి 7 రోజులు ఉంటాయి. కాబట్టి అంకెలు 7 నిలువు వరుస (**column**) లలో ఉండాలి. అందుకని నాన్న రాసినట్టు కాలెండరులో ఏ నెలలోనూ ఉండదు అని రవి అన్నాడు. కాలెండరులోని తేదీల అమరికలో నిలువు వరుసల్లో సంఖ్యలు ఏడు చొప్పున పెరుగుతాయి. కానీ నాన్న రాసిన నిలువు వరుసల్లో సంఖ్యలు ఎనిమిది చొప్పున పెరుగుతున్నాయి అని అన్నాను. వెంటనే సుధ-వారానికి ఏడురోజులు కాబట్టి కాలెండరు నిలువు వరుసల్లో సంఖ్యలు ఏడు చొప్పున పెరుగుతాయి కాని ఎనిమిది చొప్పున కాదు అని అందుకుంది.

ఈ విధంగా కాలెండరుతో మా ఆటలు మొదలయ్యాయి.

2. క్షణంలోనే సగటు - కూడకుండా మొత్తం

నాన్న: ఇదుగో జూలై 1990 కాలెండరు

ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

రవీ! ఏదైనా ఒక అడ్డ వరుస (**row**) చెప్పు. నేను వెంటనే ఆ వరుసలో ఉన్న అంకెల సగటు (**mean**) చెబుతాను.

రవి : రెండవ అడ్డ వరుస

నాన్న: 11

మధు : నాకు తెలుసు. వరుసలో ఉన్న మధ్య సంఖ్య సగటు అవుతుంది.

నాన్న: జాగ్రత్త సుమా! ఏ క్రమంలో (**sequence**) ఉన్న అంకెలకు మధ్య సంఖ్య సగటు అవుతుందో తెలియాలి. అందుకే ముందు కాలెండరులో వరుసలు ఏ క్రమంలో ఉన్నాయో చూద్దాం.

మధు : అడ్డవరుస, నిలువు వరుస, వికర్ణం (**diagonal** = అయిమూల) 3 క్రమాలు ఉన్నాయి. ప్రతి క్రమంలోనూ ఒక అంక శ్రేణి (**arithmetic Progression**) ఉంది.

అడ్డవరుసల్లో అంకెలు ఒకటి చొప్పున పెరుగుతాయి.

ఉదా : $1+1=2$, $2+1=3$; ఈ విధంగా కొనసాగుతుంది.

నాన్న: మరి నిలువు వరుసల్లో?

రవి : నిలువు వరుసల్లో అంకెలు 7 చొప్పున పెరుగుతాయి.

ఉదా : $1+7=8$, $8+7=15$

నాన్న: వికర్ణంలో?

మధు : వికర్ణంలో రెండు రకాల క్రమాలున్నాయి. ఎడమపక్క పై నుంచి కుడిపక్క కిందకి ఉన్న వికర్ణంలో అంకెలు 8 చొప్పున ఎక్కువవుతాయి.

ఉదా: $1+8=9$, $9+8=17$

కుడిపక్క పై నుండి ఎడమ పక్క కిందికి ఉన్న వికర్ణంలో సంఖ్యలు 6 చొప్పున ఎక్కువవుతాయి.

ఉదా: $4+6=10$, $10+6=16$

నాన్న: ఇలాంటి క్రమాలను సంకలన క్రమాలని (**additive sequence**) అనవచ్చు. ఈ క్రమాలలోని అంకెలకు ఒక సంఖ్యను కూడితే తరువాత అంకె వస్తుంది.

రవి : మొదటి నిలువు వరుసలోని అంకెల సగటు 15. నేను చెప్పింది కరెక్టేనా?

నాన్న: అవును. సరిగ్గా చెప్పావు. 17 సగటుగా గల రెండు క్రమాలున్నాయి. వాటిని చూపగలరా?

రవి :

3	10	17	24	31
5	11	17	23	29

సుధ : 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 అన్న క్రమానికి సగటు 17 కాదా?

మధు : 17 మధ్య సంఖ్య కాదు కాబట్టి అది ఈ క్రమం సగటుకాదు. నాన్నా! నేనొక ప్రశ్న అడగనా? ఒక క్రమంలోని అంకెలన్నీ కూడి ఎన్ని అంకెలున్నాయో దానితో భాగిస్తే వచ్చేది భాగఫలం (**quotient**) ఆ క్రమంలోని మధ్య సంఖ్య అవుతుందా?

నాన్న: చేసి చూడండి.

రవి : $$\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\frac{1+8+15+22+29}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

అవును. అన్నయ్య చెప్పినట్టే ఉంది.

నాన్న: ఒక క్రమం చూపితే ఆ క్రమంలోని అంకెల మొత్తం చెప్పగలను.

సుధ : రెండవ అడ్డవరుస

మధు : 77 అవునా?

రవి : నాకూ అర్థమైంది. 7 సంఖ్యల సగటు 11 కాబట్టి 7 సంఖ్యల మొత్తం 11×7 అంటే 77. సరే నాల్గవ నిలువు వరసలో అంకెల మొత్తం ఎంత?

నాన్న: మధ్య సంఖ్య లేదు కాని ఆ సంఖ్యల మొత్తం చెప్పగలను 58.

సుధ : $4+11+18+25=58$ ఎలా చెప్పగలిగారు?

రవి : ఎలా వచ్చింది నాన్నా?

నాన్న: నాలుగు అంకెలున్నాయి అంటే సమ సంఖ్య. అలాంటి పరిస్థితిలో రెండు చివర్ల ఉన్న అంకెలను (**end terms**) కూడాలి. $4+25=29$. దానిని అంకెల సంఖ్యలో సగంతో హెచ్చించాలి. ఇక్కడ అంకెల సంఖ్యలో సగం అంటే $4 \times \frac{1}{2} = 2$. అంకెల మొత్తం $29 \times 2 = 58$.

సుధ : వరుసలో అంకెల సంఖ్య బేసి సంఖ్యలు (**odd number**) అయితే మధ్య సంఖ్య ఉంటుంది. అదే సమ సంఖ్య (**even number**) అయితే మధ్య సంఖ్య ఉండదు.

మధు : సంకలన క్రమంలో అంకెల సంఖ్యలు బేసి సంఖ్య అయితే మధ్య అంకె సగటు అవుతుంది. క్రమంలో ఎన్ని అంకెలున్నాయో దానితో హెచ్చిస్తే మొత్తం వస్తుంది.

కాని సంకలన క్రమంలో అంకెల సంఖ్య సమ సంఖ్య అయినపుడు

రవి : మధ్య అంకె ఉండదు. కాని అంకెల మొత్తం కోసం రెండు చివర్లనున్న అంకెలను కూడి, దానిని అంకెల సంఖ్యలో సగంతో హెచ్చవేయాలి.

నాన్న: రెండు చివర్ల ఉన్న అంకెలే తీసుకోవాలని ఏమీలేదు. ఇటు చివరి అంకె తరువాత ఉన్నదానినీ, అటు చివరకు ముందు ఉన్న దానినీ తీసుకొని కూడి చూడు.

రవి : 4, 11, 18, 25. ఈ క్రమంలో 4 తరువాత ఉన్న అంకె 11, 25కు ముందు ఉన్న అంకె 18. 11, 18 కూడితే 29 వచ్చింది. $4 + 25 = 29$. రెండూ ఒకటే.

నాన్న: సెభాష్. రెండు చివర్ల ఉన్న అంకెలకు బదులు సమ స్థలంలో ఉన్న అంకెల (**equally placed numbers**) మొత్తం తీసుకోవచ్చు.

మధు : సమ స్థలంలో ఉన్న అంకెలు జత (**pair**) లవుతాయి.

ఉదా:- (4, 25) (11, 18)

జతలన్నిటి మొత్తం ఒకటే. జతల సంఖ్య అంకెల సంఖ్యలో సగం.

ఉదా: $2 = 4 \times \frac{1}{2}$ (4 సంఖ్యలు రెండు జతలవుతాయి). జత మొత్తాన్ని జతల సంఖ్యతో హెచ్చిస్తే అంకెల మొత్తం వస్తుంది.

నాన్న: చాలా చక్కగా చెప్పావు. గొప్ప గణిత శాస్త్రజ్ఞుడైన గాస్ (**Gauss**) కథ మీకు ఎప్పుడైనా చెప్పానా?

సుధ : లేదు. ఇప్పుడు చెప్పండి.

నాన్న: వినండి. గాస్ మూడవ తరగతి చదువుతున్నప్పటి సంగతి. ఉపాధ్యాయుడు తరగతిలో అందరినీ ఒకటి నుండి నూరు వరకు అంకెలు వేసి వాటి మొత్తం లెక్కగట్టమన్నాడు. మొదటగా పూర్తి చేసిన వాళ్ళు తమ పలకని ఉపాధ్యాయుని బల్ల మీద పెట్టాలి. ఈ లెక్కతో ఒక పిరియడ్ మొత్తం గడిచి పోతుందని ఉపాధ్యాయుడు అనుకున్నాడు. గాస్ అప్పటికే తనంతట తానే లెక్కల్లో ఎన్నో ప్రయోగాలు చేసేవాడు. ఒకటి నుండి వందవరకు అంకెల మొత్తం క్షణంలో ఎట్లా లెక్కకట్ట వచ్చో అతనికి తెలుసు. మొత్తం 5050 అని పలక మీద వేసి ఉపాధ్యాయుని బల్ల మీద పెట్టాడు.

రవి : 1 నుండి 100 వరకు అంకెలు రాశాడా?

నాన్న: లేదు.

సుధ : ఉపాధ్యాయునికి కోపం వచ్చి వుంటుందే!

నాన్న: అవును. కోపంవచ్చింది. కానీ అతని ఆశ్చర్యం కోపాన్ని అణచివేసింది చిటికలో సమాధానం ఎలా ఇవ్వగలిగావని గాస్‌ని అడిగాడు.

రవి : సమ స్థానంలో ఉన్న సంఖ్యలను జతచేసి ఉంటాడు.

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 98 + 99 + 100$$

ప్రతి జత మొత్తం 101

మొత్తం జతలు $\frac{1}{2} \times 100 = 50$

కాబట్టి మొత్తం $= 101 \times 50 = 5050$

మధు : ఇదంతా తానే చేశాడా?

నాన్న: అవును. గణిత శాస్త్రంలో తన ప్రతిభను చిన్నప్పుడే ఈ విధంగా కనబరిచాడు.

సుధ : అందుకే అతను అంత పెద్ద గణిత శాస్త్రజ్ఞుడయ్యాడు

మధు : సరి సంఖ్య అంకెల మొత్తం, బేసి సంఖ్యల అంకెల మొత్తం తెలుసుకోడానికి ఒకే సూత్రం లేదా?

నాన్న: మంచి ప్రశ్న అడిగావు. ఒకే సూత్రం కావాలంటే ఏం చేయాలో చూద్దాం. రెండవ అడ్డ వరుసలో ఉన్న అంకెల క్రమాన్ని రాసి, అదే క్రమాన్ని మరొకసారి పక్కనే రాయండి.

రవి : 8 9 10 11 12 13 14 8 9 10 11 12 13 14

నాన్న: సమ స్థానంలో వున్న అంకెలను జత చెయ్యండి

రవి : 8 9 10 11 12 13 14 8 9 10 11 12 13 14

నాన్న: ప్రతి జత మొత్తం ఎంత?

సుధ : 22.

నాన్న: ఎన్ని జతలు ఉన్నాయి?

రవి : 7.

నాన్న: 7 జతల మొత్తం ఎంత?

సుధ : $7 \times 22 = 154$.

కాని క్రమంలోని అంకెల మొత్తం 77 కదా?

మధు : అవును. కాని మనం క్రమంలోని అంకెలను రెండుసార్లు తీసుకున్నాం. కాబట్టి జతల మొత్తాన్ని సగం చెయ్యాలి.

సుధ : అలాగా! $\frac{1}{2} \times 154 = 77$.

ఇప్పుడు జవాబు సరిగా వచ్చింది.

నాన్న: మనం ఎన్నుకున్న క్రమాలలో 8 మొదటి అంకె, 14 చివరి అంకె.

జత మొత్తం $= 8 + 14$ ఏడు అంకెలున్నాయి.

అన్ని అంకెల మొత్తం రెండుసార్లు తీసుకుంటే $= 7 \times (8 + 14)$.

కాని అన్ని అంకెలు ఒకసారి తీసుకుంటే వాటి మొత్తం $\frac{1}{2} \times 7 \times (8 + 14)$ అవుతుంది.

సూత్రం (**formula**) తయారు చేయడానికి మొదటి అంకెను 'a' అనీ చివరి అంకెను 'l' అనీ అనుకుందాం. అంకెల సంఖ్య 'n' అనుకుందాం అప్పుడు సూత్రం ఎలా ఉంటుంది?

రవి : $\frac{1}{2} \times n(a + l)$

సరి సంఖ్య ఉన్న అంకెల మొత్తం మాటేమిటి?

మధు : దానికీ ఇదే సూత్రం వర్తిస్తుంది. 4, 11, 18, 25 తీసుకుందాం. ముందు చేసినట్లే చేస్తే 4 11 18 25 4 11 18 25

రవి : సమ స్థానం అంకెల మొత్తం 29. 4 జతలున్నాయి. నాలుగు జతల మొత్తం 4×29. కాని మనకు దీని సగం కావాలి. కాబట్టి అంకెల మొత్తం $\frac{1}{2} \times 4 \times 29 = 58$. ఇది చాలాబాగుంది. కాని ఇంతకుముందు సరి సంఖ్యల క్రమానికి మరో పద్ధతి చెప్పారు. ఇప్పుడు రెండిటికీ ఒకే సూత్రమంటున్నారు.

నాన్న: ఒక సూత్రాన్నే ఇంతకుముందు రెండు విధాలుగా వివరించాను.

$\frac{1}{2} \times n \times (a + l)$ సూత్రం తీసుకోండి.

$n \times \frac{(a + l)}{2}$ అన్నా, $\frac{1}{2} \times n \times (a + l)$ అన్నా ఒకటే కదా!

మధు : ఓ! అలాగా! $\frac{a + l}{2}$ సగటు అవుతుందన్నమాట. బేసి సంఖ్య క్రమంలో మధ్య సంఖ్య సగటు అవుతుంది. అంకెల సంఖ్య n అవుతుంది. అదే సరి సంఖ్య క్రమంలో $(a + l)$ రెండు చివర్ల ఉన్న అంకెల మొత్తం, $\frac{1}{2} \times n$ జతల సంఖ్య అవుతాయి.

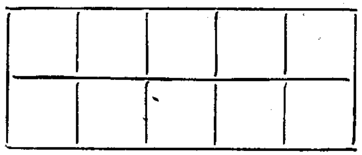
3. తమాషా దీర్ఘ చతురస్రాలు

నాన్న: ఏదైనా క్రమం మళ్ళి మళ్ళి వస్తుంటే దానిని ఏమంటారు?

సుధ : క్రమ పద్ధతి (**pattern**)

నాన్న: సమానంగా ఉన్న చతురస్రాల (**square**) తో దీర్ఘ చతురస్రం (**rectangle**) ఎలా చేస్తారు?

సుధ : చూడండి నేను ఈ విధంగా చేశాను:



నాన్న: మంచిది. దీర్ఘచతురస్రాకార విన్యాసం (**arrangement**) లో ఒకటి, అంతకంటే ఎక్కువ అడ్డ వరుసల్లో అంకెలు ఉంటాయి. కాని ప్రతి అడ్డ వరుసలో అంకెల సంఖ్య ఒకటే. దీనిని దీర్ఘచతురస్ర మాత్రిక (**matrix**) అంటారు.

సుధ : నేను అలాంటిది కాలెండరులో చూపిస్తాను.

2	3	4	5
9	10	11	12

నాన్న: ఈ దీర్ఘచతురస్ర మాత్రిక స్థాయి (**order**) 2 × 4 అంటే 2 అడ్డ-వరుసలు 4 నిలువు వరుసలు ఉన్నాయి. దీంట్లో ఉన్న తమాషా తెలిసిందా?

సుధ : ఆ! తెలిసింది!

$$2 + 12 = 14$$
$$3 + 11 = 14$$
$$4 + 10 = 14$$
$$5 + 9 = 14$$

ఇది ఒక తమాషా దీర్ఘచతురస్రం (**magic rectangle**) అన్నమాట!

రవి : అయితే నేను ఇంకొకటి చెపుతున్నాను.

1	2	3
8	9	10
15	16	17
22	23	24
29	30	31

దీని స్థాయి 5 × 3 అవునా?

నాన్న: సెభాష్. దీనిలో తమాషా బోధపడిందా?

1 + 10 = 11	8 + 17 = 25
3 + 8 = 11	9 + 16 = 25
2 + 9 = 11	10 + 15 = 25
15 + 24 = 39	22 + 31 = 53
16 + 23 = 39	23 + 30 = 53
17 + 22 = 39	24 + 29 = 53

మధు : 11, 25, 39, 53 సంకలన క్రమమవుతుంది.

రవి : చతురస్రాకార విన్యాసం తీసుకొని దానిలో తమాషా ఉందేమో చూద్దామా?

5	6	7
12	13	14
19	20	21

నాన్న: చతురస్రమాత్రికను మరోసారి చూద్దాం
సుధ : నాకు పెద్ద దీర్ఘచతురస్రమాత్రిక కావాలి. ఇదుగో

2	3	4	5	6	7
9	10	11	12	13	14
16	17	18	19	20	21
23	24	25	26	27	28

నాన్న: దీని స్థాయి ఎంత?
సుధ: దీనిలో 4 అడ్డవరుసలు, 6 నిలువువరుసలు ఉన్నాయి.
నాన్న: అంటే 4 × 6. సరే దీనిలో ఉన్న తమాషా మాకు చెప్పు చూద్దాం!

సుధ :

$2 + 28 = 30 \qquad 9 + 21 = 30$
$3 + 27 = 30 \qquad 10 + 20 = 30$
$4 + 26 = 30 \qquad 11 + 19 = 30$
$5 + 25 = 30 \qquad 12 + 18 = 30$
$6 + 24 = 30 \qquad 13 + 17 = 30$
$7 + 23 = 30 \qquad 14 + 16 = 30$

మధు : దీని నుండి చిన్న చిన్న దీర్ఘచతురస్రమాత్రికలు తీసుకుంటే మరిన్ని తమాషాలు కనబడతాయి.
నాన్న: అవును. కానీ వీటిని ఇంతటితో వదిలేద్దాం.

4. అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రాలు

మధు : ఇప్పుడు మనం చతురస్ర విన్యాసం, దానిలో ఉన్న తమాషాలు చూద్దాం.
నాన్న: మొదట సుధ వంతు.
రవి : ఏ స్థాయి తీసుకోమంటావు నాన్నా?
నాన్న: రెండవ స్థాయితో మొదలు పెడదాం.

సుధ :

1	2	3	4
8	9	10	11

సరిగ్గానే వేశానా?
రవి : సరిగ్గానే వేశావు.

10	11	20	21
17	18	27	28

కూడా తీసుకోవచ్చు.
నాన్న: అవును. మరి వీటిలో ఉన్న తమాషా ఏమిటి?

సుధ :

$1 + 9 = 10 \qquad 3 + 11 = 14 \qquad 10 + 18 = 28$
$2 + 8 = 10 \qquad 4 + 10 = 14 \qquad 11 + 17 = 28$
$20 + 28 = 48$
$21 + 27 = 48$

మధు : వికర్ణాల మొత్తం సమంగా ఉంది. 3వ స్థాయి చతురస్ర మాత్రిక తీసుకుంటే ఏమవుతుంది?

రవి : ఇదుగో

1	2	3
8	9	10
15	16	17

వికర్ణాల మొత్తం

$$1 + 9 + 17 = 27$$
$$3 + 9 + 15 = 27$$

నాన్న: మధ్య అడ్డ వరుస మాటేమిటి?

సుధ : $8 + 9 + 10 = 27$

మధ్య నిలువు వరుస మొత్తం $2+9+16=27$. అంటే మధ్య నిలువు వరుస, మధ్య అడ్డ వరుస, వికర్ణాల మొత్తం ఒకటే.
మరి 1 వ, 3వ నిలువు వరుసల మొత్తం కూడా 27 అవుతుందా?

నాన్న: అలా అయితే అది పూర్తి తమాషా చతురస్రం (**complete magic square**) అవుతుంది.

రవి : అలాలేదు. కాబట్టి, ఇది అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రం (**incomplete magic square**) నాన్నా! నేను ఒక విషయం కనిపెట్టాను. మధ్య అంకెను 3 తో, అంటే చతురస్రం స్థాయితో హెచ్చవేస్తే అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రంలో వచ్చే మొత్తం వస్తుంది.

మధు : ఇలా చేస్తే అన్ని సార్లూ సరిగ్గా వస్తుందో లేదో చూద్దాం.

12	13	14
19	20	21
26	27	28

మధ్య అంకె 20. చతురస్రస్థాయి 3 కాబట్టి మొత్తం $20 \times 3 = 60$
వికర్ణాల మొత్తం

$$12 + 20 + 28 = 60, \quad 14 + 20 + 26 = 60$$

సుధ : మధ్య అడ్డ వరుస మొత్తం

$$19 + 20 + 21 = 60$$

మధ్య నిలువు వరుస మొత్తం

$$13 + 20 + 27 = 60$$

మధు : ఇది చాలా విచిత్రంగా ఉందే. 4వ స్థాయి చతురస్రమాత్రిక తీసుకో వచ్చా!

నాన్న: తీసుకోవచ్చు. అయితే కాలెండరులో 4వ స్థాయి వరకే వెళ్ళగలమని గమనించండి. అంతకంటే ఎక్కువ స్థాయి చతురస్రం కావాలంటే 31 తరువాత కూడా అంకెలను వేసుకుంటూ పోవాలి. అలా వేసినా ఒక హద్దు ఉంది. అది ఏమిటో చెప్పగలరా?

రవి : అంకెలు ఎక్కడ ఆపుతారో తెలియకుండా ఎలా చెప్పగలం?

సుధ : కాలెండరులో నిలువు వరుసలు 7 ఉంటాయి, కాబట్టి 7వ స్థాయి చతురస్రం మించి పోలేం.

మధు : అద్భుతంగా ఉందికదా నాన్నా!

నాన్న: అవునవును. 4వ స్థాయి చతురస్రం తీసుకొని దానిలో ఉన్న తమాషా కనిపెట్టండి.

రవి :

4	5	6	7
11	12	13	14
18	19	20	21
25	26	27	28

ఇది 4వ స్థాయి చతురస్ర మాత్రిక.

సుధ : $4 + 12 + 20 + 28 = 64$
$7 + 13 + 19 + 25 = 64$

మధు : 5 + 6 + 26 + 27 = 64

11 + 14 + 18 + 21 = 64

12 + 13 + 19 + 20 = 64

4 + 7 + 25 + 28 = 64

నాన్న: మీరేం చేస్తున్నారో అర్థమయ్యిందా? ప్రతిదాంట్లోనూ 32 మొత్తంగాగల రెండు జతలను కూడుతున్నారు.

మధు : నిజమే తమాషా దీర్ఘచతురస్రంలో పూరక జత ఒక్కమారే తీసుకున్నాం.

రవి : సరే నాన్న! ఈ అంకెల స్థానాలు మార్చి ఒక పూర్తి తమాషా చతురస్రం చేయలేమా!

నాన్న: మంచి ప్రశ్న వేశావు. దీని గురించి మరోసారి చెపుతాను. కానీ మీకు తెలుసుకోవాలని ఆత్రంగా ఉంటే మీరే ప్రయత్నించి చూడండి. మీరు ఒక మాట మరిచారు. 3 వ స్థాయి చతురస్రంలో తమాషా మొత్తం మధ్య అంకె 3 తో హెచ్చిస్తే వస్తుంది. 4 వ స్థాయి చతురస్రంలో తమాషా మొత్తం ఇదే విధంగా కనుక్కోగలమా?

మధు : మధ్య అంకె లేదుగా! వ్యతిరేక మూలల్లో ఉన్న అంకెల మొత్తాన్ని 2 తో హెచ్చిస్తే తమాషా మొత్తం వస్తుంది.

2	3	4	5
9	10	11	12
16	17	18	19
23	24	25	26

రవి : తమాషా మొత్తం :

$$(2 + 26) \times 2 = 56$$

సుధ : 5, 23 కూడి దానిని 2 తో హెచ్చవేసినా ఇదే వస్తుంది.

నాన్న: తమాషా మొత్తాన్ని కనుక్కోడానికి మరి కొన్ని విధానాలు కూడా ఉన్నాయి.

రవి : కాలెండరు లోంచి తీసుకున్న చతురస్రంలోని అన్ని అంకెల మొత్తం కనుక్కోడానికి ఏమైనా పద్ధతి ఉందా?

నాన్న: ఏదైనా ఒక 3 వస్థాయి చతురస్రమాత్రికలోని ఎడమవక్క పైమూలలో నున్న అంకె చెపితే నేను అన్ని అంకెల మొత్తం చెబుతాను.

సుధ : నేను ఎన్నుకొన్న 3 వ స్థాయి చతురస్రమాత్రిక ఎడమవక్క పై మూల ఉన్న అంకె 12.

నాన్న: అన్ని అంకెల మొత్తం 180.

సుధ: అవునో కాదో నన్ను చూడనివ్వండి.

12	13	14
19	20	21
26	27	28
57	60	63 = 180

సరిగ్గానే చెప్పారు!

రవి: నాకు తెలిసిపోయింది. మధ్య అంకెను 9 తో హెచ్చవేస్తే వస్తుంది.

సుధ: కానీ, నేను మధ్య అంకె ఇవ్వనే లేదు కదా!

రవి: అయితే, ఎడమ పై మూలలో ఉన్న అంకెకు 8 కలపాలి. అంతేనా?

మధు: బాగా చెప్పావు. ఎడమ పై మూల అంకెకు బదులు కుడి పై మూల అంకెను ఇస్తే దానికి 6 కలిపితే మధ్య అంకె వస్తుంది. దీనిని 9 తో హెచ్చవేస్తే అన్ని అంకెల మొత్తం వస్తుంది.

నాన్న: ఆటలోని రహస్యాన్ని కనిపెట్టేశావు.

మధు: 4వ స్థాయి చతురస్రంలోని ఎడమపక్క పై మూలలోని అంకెను ఇస్తే అన్ని అంకెల మొత్తం చెప్పగలను.

సుధ: 4 వ స్థాయి చతురస్రంలో ఎడమ పై మూల ఉన్న అంకె 4

మధు: అయితే అన్ని అంకెల మొత్తం 256

సుధ: నన్ను లెక్కపెట్టి చూడనీ.

4	5	6	7
11	12	13	14
18	19	20	21
25	26	27	28
58	62	66	70 = 256

రవి: ఉండండి ఈసారి రహస్యాన్ని నేను కనిపెడతాను. మొదట 4 ఉన్న వికర్ణ మొత్తం తెలియాలి. 4 కి 8 వరుసగా మూడుసార్లు కలుపుకుంటూ పోతే 12, 20, 28 వికర్ణంలోని అంకెలు వస్తాయి. తరువాత 4, 28 కూడితే 32 వస్తుంది. దీనిని మొదట 2 తో హెచ్చవేస్తే వచ్చే సంఖ్య 64. దీనిని 4 తో హెచ్చవేస్తే అన్నీ అంకెల మొత్తం వస్తుంది.

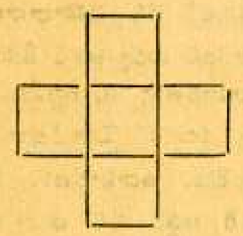
మధు: చాలా బాగా చెప్పావు.

5. కూడిక గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు

నాన్న: కాలెండరులో అంకెల విన్యాసం కూడిక గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు (**cross puzzles**) తయారు చేయటమే కాకుండా వాటిని ఎలా పరిష్కరించాలో తెలియపరుస్తుంది.

సుధ : కూడిక గుర్తులో ఒక చిక్కు సమస్య ఇవ్వు. దానిని పరిష్కరిద్దాం.

నాన్న: ఇదిగో 3వ స్థాయి కూడిక గుర్తు సమస్య. నిలువు వరుస మొత్తం,



అడ్డ వరుస మొత్తం ఒకటే ఉండేలా గళ్ళను నింపాలి.

సుధ : ఎన్నో సమాధానాలు ఉన్నాయి. నేను రెండు సమాధానాలు ఇస్తాను.

	3				13	
9	10	11		19	20	21
	17				27	

నాన్న: సెభాష్. ఇప్పుడు సమస్యను ఇంకో విధంగా ఇస్తాను. నిలువు (లేదా అడ్డ) వరుస మొత్తం 42. ఇప్పుడు 3వ స్థాయి కూడిక గుర్తు గళ్ళను పూర్తి చేయగలరా?

రవి : మొదట మధ్యలో ఉన్న అంకెను కనుక్కోవాలి. అది $\frac{42}{3} = 14$.

14 నుండి 7 తీసివేస్తే వచ్చే అంకెనూ, 14 కు 7 కూడితే వచ్చే అంకెనూ నిలువు వరుసలో పైనా కిందా నింపాలి. 14 నుండి 1 తీసివేస్తే వచ్చే అంకెనూ, 14 కు 1 కలిపితే వచ్చే అంకెనూ అడ్డవరసలో ఎడమ, కుడి వైపుల నింపాలి. సమాధానం వచ్చేసింది.

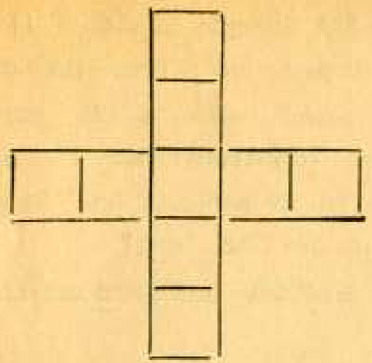
	7	
13	14	15
	21	

మధు కాలెండరులో ఉన్న విధంగా సమాధానం రావాలంటే 7, 1 ఉపయోగించాలి కాలెండరులో లేని సమాధానాలు కూడా సాధించవచ్చు. మొత్తాన్ని 3తో భాగించి మధ్య అంకె వేయాలి. ఏదైనా ఒక అనుకూలమైన అంకెను, ఉదాహరణకు 3, తీసివేసి, కూడితే వచ్చే అంకెలను (11, 17) నిలువు వరుసలో పైనా కిందా నింపాలి. అలాగే మరొక అనుకూలమైన అంకెను, ఉదాహరణకు 2, తీసివేసి, కూడితే వచ్చే అంకెలను (12, 16) అడ్డవరుసలో అటూ ఇటూ, వేసి పూర్తి చేయాలి.

	11	
12	14	16
	17	

రవి : కూడిక గుర్తుతో ఇంతకంటే పెద్ద స్థాయి సమస్యలు లేవా?

మధు : 3వ స్థాయి తరువాత 5వ స్థాయి కూడిక గుర్తు చిక్కు సమస్య ఇలా ఉంటుంది.



సుధ : కాలెండరు సహాయం లేకుండా ఈ సమస్యను పరిష్కరించలేను.

రవి : ఏం ఎందుకని? నాకు ఒక వరుసలోని మొత్తం కానీ మధ్య అంకెను కానీ ఇవ్వు. నేను పరిష్కరిస్తాను.

మధు : సరే ఒక వరుస మొత్తం 55.

రవి : మధ్యలో వున్న అంకె 11. వరుసగా రెండుసార్లు 2ను, 11 నుండి తీసివేస్తే 9, 7 వస్తాయి. 11కు వరుసగా రెండుసార్లు 2 కూడితే 13, 15 వస్తాయి. ఈ అంకెలు నిలువు గదులలోకి వెళతాయి. 11 నుండి 3ను వరుసగా రెండుసార్లు తీసివేస్తే మనకు 8, 5 వస్తాయి. 3ను వరుసగా రెండుసార్లు కూడితే 14, 17 వస్తాయి, ఇవి అడ్డ వరుసల్లోకి వెళతాయి. కాబట్టి సమాధానం.

		7		
		9		
5	8	11	14	17
		13		
		15		

రవి : మరో విధంగా దీనికి సమాధానం చెప్పవచ్చు. 11 మధ్య అంకెగా 5 సంఖ్యలు గల రెండు సంకలన క్రమాలు తీసుకోవచ్చు.

నాన్న: ఇది చాలా బాగుంటుంది. ఇప్పుడు ఈ చిక్కు సమస్యను మరోవిధంగా చూద్దాం. వరుసగా (**consecutive**) ఉన్న 5 సంఖ్యలు, ఉదాహరణకు 25, 26, 27, 28, 29 ఉన్నాయి. వీటితో 3వ స్థాయి కూడిక గుర్తు చిక్కు సమస్యను ఎలా పరిష్కరిస్తావు?

రవి : 5 సంఖ్యలలో మధ్య సంఖ్య కూడిక గుర్తు మధ్యలో ఉండాలి. ఇదిగో సమాధానం.

	26	
25	27	29
	28	

మధు : నీవు చాలా తెలివైన వాడివే! నాకు మరో ఉపాయం తోచింది. వరుస అంకెలే అవసరం లేదు. సంకలన క్రమంలో ఉన్న అంకెలతో కూడా ఈ సమస్యను పరిష్కరించవచ్చు. ఉదాహరణకు 7, 11, 15, 19, 23 తీసుకో.

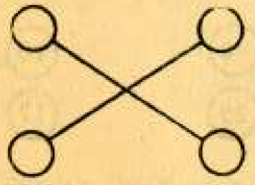
సుధ : నేను చేసి చూపిస్తాను.

	11	
7	15	23
	19	

నాకూ వచ్చింది.

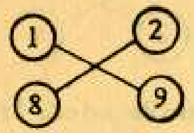
6. నక్షత్రపు గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు

నాన్న: మనం కూడిక గుర్తు చిక్కు సమస్యలు చూశాం. ఇప్పుడు నక్షత్రపు గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు (**Star puzzles**) చూద్దామా!



ఇది 2వ స్థాయి నక్షత్రపు చిక్కు సమస్య. రెండు వికర్ణాల మొత్తం సమంగా ఉండేట్లు ఎలా సాధించాలి?

సుధ: కాలెండరు ఉపయోగిస్తే చాలా తేలిక.



ఈ వికర్ణాల మొత్తం 10.

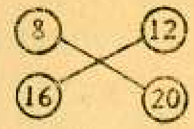
రవి: నీవు వికర్ణం మొత్తం చెబితే నేను నక్షత్రపు చిక్కు సమస్యను పూరించగలను.

నాన్న: సరే! వికర్ణం మొత్తం 28.

రవి: 28 ని రెండు అంకెల మొత్తంగా రెండు విధాలుగా రాయాలి

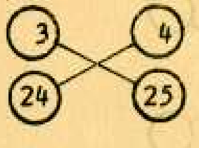
$28 = 20 + 8$ $\qquad$ $28 = 12 + 16$

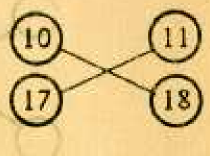
కాబట్టి సమాధానం



నాన్న: 28 కి 20, 8 పూరక జత (**Complementary pair**). అలాగే 12, 16. మీరు ఇష్టపడితే 'పూరక జత' అన్నపదాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

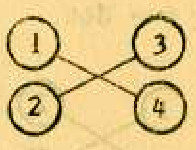
సుధ: కానీ ఇది కాలెండరులో ఉన్న సమాధానం కాదు. కాలెండరులో ఉన్న సమాధానం కోసం ఇలా చెయ్యొచ్చు.





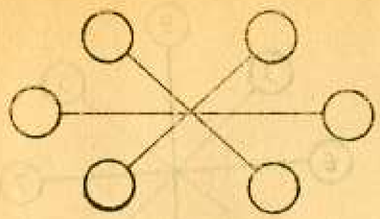
రవి: వరసగా వచ్చే నాలుగు అంకెలతో నక్షత్రపు సమస్యను పరిష్కరించలేమా!

సుధ: నాకు అర్థమయ్యింది.



సమదూరంలో ఉన్న అంకెల జతలను తీసుకోవాలి.

మధు: చాలా బాగుంది. 3వ స్థాయి నక్షత్రపు చిక్కు సమస్యను తీసుకుంటే ఎలా పూర్తి చేస్తావు?

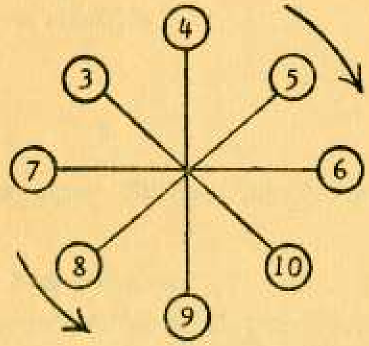


రవి : మరేం లేదు. 3వ స్థాయి అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రంలోని మధ్య అంకెను వదిలేసి మిగతావి నింపటమే.

మధు : నక్షత్రపు చిక్కు సమస్యలో ఎన్ని పూరక జతలున్నాయో అదే ఆ నక్షత్రపు సమస్య స్థాయి అని చెప్పవచ్చా నాన్నా ?

నాన్న: అలా చెప్పవచ్చు. వరసగా 8 అంకెలు అంటే 3,4,5,6,7,8,9,10 తీసుకొని 4వ స్థాయి నక్షత్రపు సమస్యను పరిష్కరించండి.

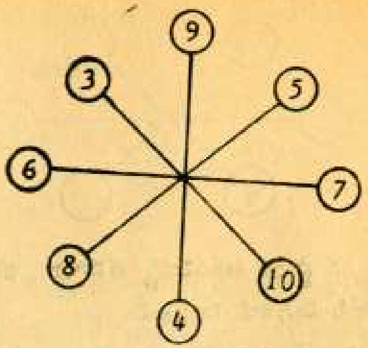
రవి : నాలుగు పూరకజతలు (3,10) (4,9) (5,8) (6,7) కాబట్టి నక్షత్రం ఇలా ఉంటుంది.



మధు: 3,4,5,6, వరసగా ప్రదక్షిణ (**clock -wise**) దిశలోనూ 7,8,9,10 వరసగా అప్రదక్షిణ (**anti clock-wise**) దిశలోనూ ఉన్నాయి.

నాన్న: ఇవి ఇలాగే ఉండాలా?

రవి : అవసరం లేదు. ఈ కింది విధంగా కూడా ఉండొచ్చు.



మధు: బాగుంది. కాని నాకు దీనికంటే ముందుదే నచ్చింది. ముందులాగా సంకలన క్రమంలో వున్న 8 అంకెలతో 4వ స్థాయి నక్షత్రపు చిక్కు సమస్యను పూరించవచ్చు.

7. పూర్తి తమాషా చతురస్రాలు

నాన్న: ఇంతకు ముందు రవి అడిగిన ప్రశ్నను చూద్దాం. చతురస్రంలో ఉన్న అంకెలను మార్చి పూర్తి తమాషా చతురస్రం తయారు చేయవచ్చు.

సుధ : అడ్డ వరుసల్లో, నిలువువరుసల్లో, వికర్ణాలలో అంకెల మొత్తం సమంగా ఉండాలి కదూ!

నాన్న: అవును ప్రయత్నించి చూద్దాం.

రవి : అద్భుతంగా ఉంటుంది.

నాన్న: కాలెండరులోని 2వ స్థాయి చతురస్రంతో మొదలు పెడదాం.

సుధ : ఇదిగో 2వ స్థాయి చతురస్రం.

1	2
8	9

ఎంత ప్రయత్నించినా, నేను దీనిని పూర్తి తమాషా చతురస్రంగా మార్చలేను.

రవి : సుధ చెప్పింది ముమ్మాటికి నిజం.

నాన్న: ఇప్పుడు 3వ స్థాయి చతురస్రాన్ని చూద్దామా!

1	2	3
8	9	10
15	16	17

సుధ : నేను కూడ చూడనా?

$$8 + 9 + 10 = 27$$
$$2 + 9 + 16 = 27$$
$$17 + 9 + 1 = 27$$
$$3 + 9 + 15 = 27$$

రవి : చివరికెలా కూడేశావు.

సుధ : నేను కూడనే లేదు. అంకెలు సంకలన క్రమంలో ఉన్నాయి కదా. కాబట్టి వీటి మొత్తం 3×9 అంటే 27.

రవి : తమాషా మొత్తం $9 \times 3 = 27$. అంకెలను మార్చి పూర్తి తమాషా చతురస్రంగా మార్చటం ఎలా? నాన్నా ఏదైనా చిన్న కిటుకు ఇవ్వండి.

నాన్న: కొంత సమయం తీసుకుని ప్రయత్నించి విఫలమైనా పరవా లేదు. పూర్తి తమాషా చతురస్రంలో ఒక నిర్మాణ పద్ధతి ఉంది. ముందు దానిని గుర్తించాలి. 1,2,3 అంకెల నుండి 8,9,10 అంకెలు ఎలా వస్తాయి?

సుధ : 1, 2, 3 కు 7 కూడితే 8,9,10 వస్తాయి.

రవి : 1,2,3 కు 14 కూడితే చివరి అడ్డ వరుసలోని 15, 16, 17 వస్తాయి

నాన్న: బాగుంది. అయితే 1,2,3 నుండి 1,2,3 ఎలా వస్తాయి?

సుధ : 1,2,3 కు సున్నా కలిపితే 1,2,3 వస్తాయి.

నాన్న: 1,2,3 తో ఒకటి, 0,7,14 తో మరొకటి చొప్పున రెండు చతురస్రాలు చెయ్యాలి. వీటిని అనుబంధ లేటిన్ చతురస్రాలు (**auxiliary Latin square**) అంటారు.

మధు : లేటిన్ చతురస్రం (**Latin square**) అంటే ఏమిటి నాన్నా?

నాన్న: అదే చెప్పబోతున్నాను. లేటిన్ చతురస్రంలో అవే అంకెలను ప్రతి అడ్డ వరుసా, నిలువు వరుసల్లో ఉపయోగించాలి. కానీ ఒకే అంకెను రెండుసార్లు ఒకే వరుసలో ఉపయోగించకూడదు.

రవి : మరి వికర్ణంలో?

నాన్న: ఒకే అంకె వికర్ణంలో రెండుసార్లు వుండవచ్చు.

సుధ : అడ్డ వరుసల, నిలువు వరుసల వికర్ణాల మొత్తాలు సమంగా ఉండాలా!

నాన్న: లేదు! అడ్డ వరుసల మొత్తం, నిలువు వరుసల మొత్తం సమంగా ఉంటే చాలు.

రవి : అయితే 2వ స్థాయి లేటిన్ చతురస్రం కూడా చేయవచ్చు. ఉదాహరణకు

1	2
2	1

సుధ : ఇప్పుడు 1,2,3తో లేటిన్ చతురస్రం చేద్దాం. 2 మధ్యగదిలో ఉండాలి.

1		
	2	
		3

1	3	2
3	2	1
2	1	3

నేను చెయ్యగలిగాను.

రవి : నేను 0,7,14తో లేటిన్ చతురస్రం చేస్తాను.

0	14	7
14	7	0
7	0	14

సుధ : అన్నయ్య కూడా నేను చేసినట్లే చేశాడు.

మధు : అవును. 1,2,3 లకు బదులు వాటి స్థానంలోనే 0,7,14 ఉపయోగించాడు. దీనిని "ప్రతిక్షేపణం" (**replacement**) అంటారు. దీనిని ఇలా చూపవచ్చు.

$1 \rightarrow 0$

$2 \rightarrow 7$

$3 \rightarrow 14$

నాన్న: బాగుంది. ప్రతిక్షేపణ గుర్తు→. సరే ఈ రెండు అనుబంధ లాటిన్ చతురస్రాలను కూడితే కొత్త చతురస్ర మాత్రిక వస్తుంది.

సుధ : నేను చేస్తాను.

1+ 0	3+14	2+7
3+14	2+7	1+ 0
2+7	1+ 0	3+14

అంటే :

1	17	9
17	9	1
9	1	17

రవి : ఇది మరో లాటిన్ చతురస్రం నాన్నా!

నాన్న: ఒకవేళ లాటిన్ చతురస్రంలో 0,7,14 లను మరో రకంగా అమర్చి ఆ తరువాత కూడితే!

మధు : నేను ప్రయత్నిస్తాను. 1,2,3 క్రమంగా ఎడమ ప్రక్క పైనుంచి కుడి పక్క కిందకు ఉన్నాయి. 0,7,14 లను వికర్ణంలో కుడిపక్క పైనుంచి ఎడమపక్క కిందకి తీసుకుంటాను.

		0
	7	
14		

→

7	14	0
0	7	14
14	0	7

రవి : నేను వీటిని సంయుక్త చతురస్రంగా చేస్తాను.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 14 \\ 14 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 17 & 2 \\ 3 & 9 & 15 \\ 16 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

కానీ ఇది లాటిన్ చతురస్రం కాదు. కాలెండరులో నుంచి మనం తీసుకున్న మూడవ స్థాయి చతురస్రంలోని సంఖ్యలే దీంట్లోనూ ఉన్నాయి. అయితే ఇది పూర్తి తమాషా చతురస్రమా కాదా?

సుధ : నిలువు వరుసల మొత్తం, అడ్డవరుసల మొత్తం లెక్కగట్టి చూస్తాను.

$8 + 17 + 2 = 27$ $\quad$ $8 + 3 + 16 = 27$

$3 + 9 + 15 = 27$ $\quad$ $17 + 9 + 1 = 27$

$16 + 1 + 10 = 27$ $\quad$ $2 + 15 + 10 = 27$

రవి : వికర్ణాల మొత్తం

$8 + 9 + 10 = 27,$ $\quad$ $2 + 9 + 16 = 27$

ఆహా! ఇది పూర్తి తమాషా చతురస్రం!

నాన్న: అంతేకాదు. దీంట్లో మరికొన్ని తమాషా లక్షణాలు ఉన్నాయి.

సుధ : ఏమిటి నాన్నా!

నాన్న: అంకెల వర్గాలను (**squares of numbers**) వాటి గళ్ళలో వేయండి.

64	289	4
9	81	225
256	1	100

ఇప్పుడు ఇది తమాషా చతురస్రమేనా అని పరీక్షించాలి. పూర్తి తమాషా చతురస్రం అయితే కాదు. కానీ దీనిలో కొన్ని ప్రత్యేక లక్షణాలు ఉన్నాయి.

64	289	4	357
9	81	225	
256	1	100	357
329		329	

నాన్న: దీనిలోని ప్రత్యేకత ఏమిటి?

మధు : మధ్య నిలువు వరుస మొత్తం, మధ్య అడ్డవరుస మొత్తం, వికర్ణాల మొత్తం సమంగా లేవు. అయితే అటూ ఇటూ ఉన్న నిలువు వరుసల మొత్తం పైనా కిందా ఉన్న అడ్డ వరుసల మొత్తం సమంగా ఉంది.

నాన్న: దీంట్లోనే మరో సమస్యకు సమాధానం ఉంది గమనించారా? 8, 3, 16 అంకెల వర్గాల మొత్తం 2, 15, 10 అంకెల వర్గాల మొత్తం ఒకటే. అంటే వర్గాల మొత్తం ఒకటే ఉన్న మూడేసి సంఖ్యలను 2 ఇవ్వమన్నప్పుడు దీని ద్వారా కనుక్కోవచ్చన్న మాట.

రవి : భలేగా ఉందే!

మధు: 4వ స్థాయి అంపూర్ణ తమాషా చతురస్రంలో అంకెలను మార్చి ఒక పూర్తి తమాషా చతురస్రం చేయగలమా?

నాన్న: నిస్సందేహంగా మార్చవచ్చు.

మధు: చూడండి నాన్నా. ఇప్పుడు ఈ అంకెలను తీసుకుందాం :

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

ఈ చతురస్రం నుంచి 1, 2, 3, 4 అనీ 0, 7, 14, 21 అనీ రెండు

అంకెల సమూహాలు వస్తాయి. ఈ సమూహాలను ఏమని అంటారు నాన్నా!

నాన్న: 1, 2, 3, 4 లను ఆధార అంకెలనీ (**basic numbers**) 0, 7, 14, 21 ని మూల అంకెలనీ (**root numbers**) అంటారు.

మధు: ఆధార అంకెలతో ఒక లాటిన్ చతురస్రం, ఆ తరువాత మూల అంకెలతో ఒక లాటిన్ చతురస్రం చేద్దాం.

సుధ : కానీ మధ్య గడి లేదు కాబట్టి మధ్య అంకె ఉండదు. మరి లాటిన్ చతురస్రం చేసేది ఎలా?

రవి : నేను ప్రయత్నించి చూస్తాను :

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

మధు: శభాష్! 0,7,14,21 లతో లాటిన్ చతురస్రం నేను చేస్తాను. 4 కుడి పై నుంచి ఎడమ కిందికి వచ్చే వికర్ణంలో ఉంది. కాబట్టి 21 ఎడమ పై నుంచి కుడి కిందకి వచ్చే వికర్ణంలో ఉండాలి :

21			
	21		
		21	
			21

→

21	0	7	14
14	21	0	7
7	14	21	0
0	7	14	21

1, 2, 3, 4 పై అడ్డవరుసలో ఉన్నాయి. కాబట్టి 0, 7, 14, 21 కింది అడ్డవరుసలో ఉండాలి. నాకు వచ్చింది. రెండు లాటిన్ చతురస్రాలను గడుల వారీగా కూడాలి.

రవి : నేను చేస్తాను నాన్నా!

1+21	0+2	3+7	4+14
2+14	3+21	4+0	7+1
3+ 7	14+4	1+21	2+0
4+10	1+7	2+14	3+21

=

22	2	10	18
16	24	4	8
10	18	22	2
4	8	16	24

ఇది ఏం బాగోలేదు.

సుధ : అవును. ఒకే వికర్ణంలో 24 రెండు సార్లు వచ్చింది. అలాగే 18, 22 కూడా. వికర్ణాల అంకెల మొత్తం కూడా సమంగా లేదు. కాబట్టి ఇది అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రం కూడా కాదు.

మధు: అయ్యో! మనకు లాటిన్ చతురస్రమైనా రాలేదు. ఇప్పుడు ఏదిదారి?

నాన్న: లాటిన్ చతురస్రాన్ని పలు విధాలుగా చెయ్యొచ్చు. 1, 2, 3, 4 అంకెలతో సరైన లాటిన్ చతురస్రం నేను చేస్తాను చూడండి:

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

మధు: దీనిని బట్టి 1, 2, 3, 4 లకు బదులు 0, 7, 14, 21 లను ప్రతిక్షే

పించి రెండవ లాటిన్ చతురస్రం చేస్తాను. ప్రతిక్షేపణ ఈ విధంగా ఉంటుంది.

1 → 0

2 → 7

3 → 14

4 → 21

ఆ తరువాత రెండు చతురస్రాలను గడుల వారీ కూడాలి. అంతేనా?

రవి : నేను చేసి చూస్తాను:

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

+

0	7	14	21

మధు: ఆగాగు. రెండవ లాటిన్ చతురస్రాన్ని మరో రకంగా చెయ్యాలి.

రవి : సరే మొదటి చతురస్ర మాత్రికలో అంకెలను మార్చి రెండవ చతురస్ర మాత్రికను మరో విధంగా అమరుద్దాం!

మధు: అంటే అదే ప్రతిక్షేపణ ఉపయోగిద్దామను కుంటున్నావా?

రవి : అవును,

1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1

0	14	7	21
7	21	0	14
14	0	21	7
21	7	14	0

మధు: బాగుంది. కానివ్వు.

రవి : ఇప్పుడు వీటి మొత్తం కనుక్కోవాలి.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

+

0	14	7	21
7	21	0	14
14	0	21	7
21	7	14	0

సుధ : నేను చేస్తాను.

1	16	10	25
10	25	1	16
16	1	25	10
25	10	16	1

మధు: 1, 10, 16, 25 అంకెలతో లాటిన్ చతురస్రం అయితే వచ్చింది. ఇది పూర్తి తమాషా చతురస్రమే. కానీ కాలెండరులో నుంచి మనం తీసుకున్న నాల్గవ స్థాయి సంఖ్యలతో కాదు.

నాన్న: చూడండి పిల్లలూ! నేను మొదట ఇచ్చిన లాటిన్ చతురస్రాన్ని ముందు శ్రద్ధగా పరిశీలించండి.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

మధు: నాకు ఇప్పుడు అర్థమయ్యింది. తప్పో ఒప్పో చెప్పండి. ఈ చతురస్రాన్ని నాలుగుగా విభజిస్తే నాలుగు 2వ స్థాయి చతురస్రాలు వస్తాయి:

1	2
3	4

3	4
1	2

2	1
4	3

4	3
2	1

వీటిలో అన్ని వికర్ణాల మొత్తం 5. 1వ, 3వ చతురస్రాలు, 2వ 4వ చతురస్రాలు అద్దంలోని ప్రతిబింబాల్లా (images) ఉన్నాయి. పెద్ద చతురస్రంలో 3వది 1వ దాని కిందా, 4వది 2వ దానికిందా ఉన్నాయి.

నాన్న: చాలా బాగుంది. ఇప్పుడు 0, 7, 14, 21తో లాటిన్ చతురస్రం ఎలా నిర్మించాలి?

రవి : వికర్ణాల మొత్తం సమంగా ఉండకూడదు. నిలువు వరుసల మొత్తం అడ్డవరుసల మొత్తం సమంగా ఉండాలి. అంతేనా?

నాన్న: వికర్ణాల మొత్తం సమంగా రావాలంటే 1, 2, 3, 4 అంకెలలో పూరక జతలను ఎలా ఉపయోగించామో చూశారా?

మధు: అయితే 0, 7, 14, 21 లో పూరక జతల్ని తీసుకోవాలి. అవి (0, 21) (7, 14).

రవి : దీనితో నేను నాలుగు చిన్న చతురస్రాలను చెయ్యనా?

0	21
21	0

7	14
14	7

21	0
0	21

14	7
7	14

నాన్న: బాగుంది. వీటిని ఉపయోగించి 4వ స్థాయి లాటిన్ చతురస్రాన్ని ఎలా నిర్మిస్తారు. మొదటి లాటిన్ చతురస్రంలో ప్రతిబింబ చతురస్రాలు ఒక దానికింద ఒకటి ఉన్నాయి.

మధు : కాబట్టి ఇప్పుడు ప్రతిబింబ చతురస్రాలను వికర్ణరీతిలో అమర్చాలి.

0	21
21	0

21	0
0	21

0	21	14	7
21	0	7	14
7	14	21	0
14	7	0	21

రవి : రెండు లాటిన్ చతురస్రాలను గడుల వారీగా నేను కూడుతాను.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

+

0	21	14	7
21	0	7	14
7	14	21	0
14	7	0	21

=

1	23	17	11
24	4	8	16
9	15	25	3
18	10	2	22

మధు : నాన్నా సాధించగలిగాం.

సుధ : నేను పరీక్షించి చూస్తాను.

$$1 + 4 + 25 + 22 = 52$$
$$11 + 8 + 15 + 18 = 52$$
$$1 + 23 + 17 + 11 = 52$$
$$24 + 4 + 8 + 16 = 52$$
$$9 + 15 + 25 + 3 = 52$$
$$18 + 10 + 2 + 22 = 52$$
$$1 + 24 + 9 + 18 = 52$$
$$23 + 4 + 15 + 10 = 52$$
$$17 + 8 + 25 + 2 = 52$$
$$11 + 10 + 3 + 22 = 52$$

అవును. నిజంగానే ఇది ఒక పూర్తి తమాషా చతురస్రమే!

మధు : నాన్నా! నాకో సందేహం. కాలెండరులో మూల సంఖ్యలు 0,7,14, లేదా 0,7,14,21. '0'తో మొదలుకొని ఇవి 7 అంకె గుణిజాలు (Multiples) కాని మరో అంకె వరుస గుణింతాలతో తమాషా చతురస్రం చెయ్యగలమా?

రవి : అంటే మూల సంఖ్యలు 0,6,12,18 లేదా 0,4,8,12 మొదలైన వాటితోనా?

మధు : అవును.

నాన్న : ఎందుకు సాధ్యంకాదు ప్రయత్నించి చూడండి.

సుధ : నేను 1,2,3 ఆధార అంకెలూ 0,4, 8 మూల అంకెలతో 3వ స్థాయి పూర్తి తమాషా చతురస్రం చేస్తాను.

రవి : నేను 1,2,3,4 ఆధార అంకెలతోనూ, 0,6,12,18 మూల అంకెలతోనూ 4వ స్థాయి పూర్తి తమాషా చతురస్రం చేస్తాను.

మధు : ఊ! కానివ్వండి.

సుధ :

1	3	2
3	2	1
2	1	3

+

4	8	0
0	4	8
8	0	4

=

5	11	2
3	6	9
10	1	7

నాకు వచ్చింది!

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

+

0	18	12	6
18	0	6	12
6	12	18	0
12	6	0	18

=

1	20	15	10
21	4	7	14
8	13	22	3
16	9	2	19

నాకు కూడా వచ్చింది!

నాన్న: ఇక్కడ జాగ్రత్తగా పాటించాల్సిన విషయం ఒకటి ఉంది. మూల అంకెలలో 2వది ఆధార అంకెలలో చివరిదానికంటే చిన్నదికాకూడదు.

మధు : నాకు అర్థమైంది. లేకపోతే అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రం కూడా సరిగా ఉండదు. 2వ మూల అంకె కడపటి ఆధార అంకె కన్నా చిన్నదిగా ఉండే 3వ స్థాయి చతురస్రం ఈ విధంగా ఉంటుంది.

1	2	3
3	4	5
5	6	7

దీంట్లో 1,2,3 ఆధార అంకెలు 0,2,4 మూల అంకెలు. రెండవ మూల అంకె (2) కడపటి ఆధార అంకె (3) కంటే చిన్నది.

రవి : రెండవ మూల అంకె కడపటి ఆధార అంకె ఒకటే అయితే అంకెల అమరిక అందంగా ఉంటుంది. ఈ విధంగా ఉండే 4వ స్థాయి చతురస్ర మాత్రికను చూద్దాం.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

మధు : వికర్ణంలో పూరక జతలలోని అంకెల స్థానాన్ని మార్చి దీనిని పూర్తి తమాషా చతురస్రం ఎలా చెయ్యాలో తెలిసింది.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

ఇదే ప్రక్రియను ఉపయోగించి కాలెండరులోని అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రాన్ని పూర్తి తమాషా చతురస్రంగా మార్చగలమా?

నాన్న: ప్రయత్నించండి.

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

ఇది ఒక అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రం. (1, 25), (8, 17), (4, 22), (10, 16) పూరక జతలు. వీటిని తారుమారు చేస్తే ఈ కింది విధంగా ఉంటుంది.

25	2	3	22	52
8	17	16	11	52
15	10	9	18	52
4	23	24	1	52
52	52	52	52	

52 52

మధు : ఈ తమాషా చతురస్రంలోని అంకెల వర్గాలను వేసి చూద్దామా!

నాన్న: నేనూ అదే చెప్ప బోతున్నాను. చెయ్యండి.

రవి : నేను ఆ ప్రయత్నంలోనే ఉన్నాను.

625	4	9	484	1122
64	289	256	121	730
225	100	81	324	730
16	529	576	1	1122
930	922	922	930	

856 996

సుధ : నాన్నా! ఇది 3 × 3 చతురస్ర మాత్రికలో వచ్చిన దానికన్నా చాలా తమాషాగా ఉంది!

మధు : ఓహో! ఒక సంఖ్యను నాలుగు అంకెల వర్గాల మొత్తంగా రెండు విధాలుగా రాయవచ్చున్న మాట!

రవి : నాన్నా! అంకెల ఘనాలను (cube of number) తీసుకుంటే ఏమౌతుంది?

మధు : నేను చేస్తూనే ఉన్నాను. పాకెట్ కాలుక్యులేటర్‌తో ఘనాలు కనుక్కుంటాను.

15625	8	27	10648	26308
512	4913	4096	1331	10852
3375	1000	729	5832	10936
64	12167	13824	1	26056
19576	18088	18676	17812	

15808 21268

సుధ : అబ్బే దీంట్లో తమాషా ఏం లేదు.

నాన్న: తొందర పడకు! ఇది ఒక సవాలుగా తీసుకొని పరిశోధించాలి.

రవి : నాకు ఒక ఆలోచన వచ్చింది. తమాషా చతురస్రాన్ని ఈ విధంగానే ఎందుకు చెయ్యాలి? మరో విధంగా చేయకూడదా?

నాన్న: అది మంచి ప్రశ్న. 2,24ను తారుమారు చేసి....

సుధ : అలాగే (3,23), (8,18), (15,11) లనుకూడా తారుమారు చెయ్యాలి.

రవి : ఇదుగో నే చేశాను!

1	24	23	4
18	9	10	15
11	16	17	8
22	3	2	25

సుధ : ఇది పూర్తి తమాషా చతురస్రమేనా?

రవి : అయి ఉండాలి.

1	24	23	4	52
18	9	10	15	52
11	16	17	8	52
22	3	2	25	52
52	52	52	52	

52 (diagonal) 52 (diagonal)

అవును! పూర్తి తమాషా చతురస్రమే!

నాన్న: నాదొక సలహా. మధ్య నున్న నిలువు వరుసలను తారుమారు చేసి చూడండి!

రవి : వికర్ణాల మొత్తాన్ని మాత్రమే పరీక్షిస్తే చాలు.

1	23	24	4
18	10	9	15
11	17	16	8
22	2	3	25

52 (diagonal) 52 (diagonal)

ఇది కూడా పూర్తి తమాషా చతురస్రమే!

సుధ : వీటి ఘనాలను వేసి చూడమా నాన్నా?

నాన్న: చెయ్యండి.

మధు : అయినా దీనివల్లకూడా ప్రయోజనం ఉండదు.

నాన్న: నీవన్నది నిజం. మనకు కావలసిన విధంగా రావాలంటే ఒక కొత్త పద్ధతి ఉంది.

రవి : అదేమిటి నాన్నా?

నాన్న: మధ్య బిందువుల చతురస్రం (**mid-point square**) చేయండి

రవి : ఈ విధంగానా?

1	23	24	4
18	10	9	15
11	17	16	8
22	2	3	25

నాన్న: అవును.

సుధ : ఇప్పుడు దీంతో ఏమి చెయ్యాలి నాన్నా?

మధు : ఎదురెదురు భుజాలలో ఉన్న సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోవాలేమో

నాన్న: నీవు చాలా తెలివైన వాడివి. కానివ్వండి.

సుధ : నేను వీటి వర్గాలతో మొత్తం లెక్కించి చూస్తాను.

రవి : నేను ఘనాల మొత్తం లెక్కగడతాను.

మధు : త్వరగా చేయండి

సుధ : $18^2 + 23^2 + 3^2 + 8^2 = 926$

$24^2 + 15^2 + 11^2 + 2^2 = 926$

రవి : $18^3 + 23^3 + 3^3 + 8^3 = 18538$

$24^3 + 15^3 + 11^3 + 2^3 = 18538$

నాన్న: చూశారా! ఎంత గమ్మత్తు విషయాలు బయటపడ్డాయో! కాలెండరులోని 4×4 చతురస్రమాత్రికలో ఈ విధమైన లక్షణాలు ఉన్నాయేమిటి చూడండి.

సుధ : నాన్న ఇది చూడండి.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

దీనిని 3 వ స్థాయి పూర్తి తమాషా చతురస్రంగా మార్చడం నాకు తెలుసు.

1, 5, 9 అను మధ్య నిలువు వరుసలో. 3, 5, 7 అను మధ్య అడ్డ వరుసలో తీసుకోవాలి. 2, 58 అనూ 4, 5, 6 వికర్ణాలలో కిందనుండి పైకి వేయాలి.

	1	
3	5	7
	9	

8	1	6
3	5	7
4	9	2

కాలెండర్‌లోని 3 వ స్థాయి అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రాన్ని సంపూర్ణ తమాషా చతురస్రంగా మార్చవా?

1	2	3
8	9	10
15	16	17

1, 9, 17 మధ్య నిలువు వరుసలో 3, 9, 15 మధ్య అడ్డవరుసలో ఉండాలి. 2, 9, 16 అను, 8, 9, 10 అనూ వికర్ణాలలో కింది నుంచి పైకి వేయాలి.

	16	1	10	27
	3	9	15	27
	8	17	2	27
27	27	27	27	27

ఆహా! నాకూ వచ్చేసింది!

8. నిలువు వరుసల మొత్తం ఆట

సుధ : "ఒక సంఖ్యను తలచుకో" లాంటి ఆటలు కాలెండరులో లేవా నాన్నా?

నాన్న: అలాంటి ఆటలూ ఉన్నాయి. జూలై నెలను తీసుకో :

ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

మొదటి నిలువు వరుసలో నుండి ఒక సంఖ్యను ఎన్నుకుని మనసులో ఉంచుకో. తరువాత 3 వ నిలువు వరుసనుండి మరొక సంఖ్యను ఎన్నుకుని దానిని కూడా మనసులో పెట్టుకో. మనసులోనే రెండు సంఖ్యలను కూడు. ఎంత వచ్చిందో చెప్పకు. ఒకనిబంధన ఉంది. రెండు సంఖ్యల మొత్తం 32 కన్నా తక్కువ ఉండాలి. ఎందుకంటే మన కాలెండరులో అంకెలు 31 వరకే ఉన్నాయి కదా!

సుధ : సరే రెండు సంఖ్యల మొత్తం లెక్కగట్టాను.

నాన్న: నీవనుకున్న సంఖ్యల మొత్తం 4వ నిలువు వరుసలో ఉంది.

సుధ : తమాషాగా ఉందే! నేను మొదటి నిలువువరుస నుండి 8, 3 వ నిలువు వరుస నుండి 17 తీసుకుని కూడాను. రెండింటి మొత్తం 25. ఇది 4 వ నిలువు వరుసలో ఉంది. మీరు ఎలా కనుక్కున్నారు నాన్నా?

రవి : నాన్నా, నేను ఒక సంఖ్యను రెండవ నిలువు వరుస నుండి మరొక సంఖ్యను 4 వ నిలువు వరుస నుండి ఎన్నుకున్నాను. వాటి మొత్తం లెక్కగట్టాను.

నాన్న: సంఖ్యల మొత్తం 6 వ నిలువు వరుసలో ఉంది.

రవి : అవును! నేను 2 వ నిలువు వరుసనుండి 16, 4 వ నిలువ వరుసనుండి 4 తీసుకున్నాను. వీటి మొత్తం 20 వచ్చింది. 6 వ నిలువువరుసలో 20 ఉంది.

సుధ : ఒకే నిలువు వరుస నుండి రెండు సంఖ్యలను తీసుకోకూడదా?

నాన్న: రెండు సంఖ్యలనూ 4 వ నిలువు వరుస నుండి తీసుకో. వాటి మొత్తాన్ని లెక్కకట్టు.

సుధ : ఆ! చేశాను.

నాన్న: వాటి మొత్తం మొదటి నిలువు వరుసలో ఉంది.

సుధ : అవును! నేను 11, 18 ఎన్నుకున్నాను. వీటిని కూడితే 29 వస్తుంది. ఇది 1 వ నిలువు వరుసలో ఉంది.
ఆ! నాకు అర్థమైంది.
$4 + 4 = 8$. 8 మొదటి నిలువు వరుసలో ఉంది.

మధు : నాకో సందేహం! 1 వ నిలువు వరుస నుండి 22, 3 వ నిలువు వరుస నుండి 10 తీసుకుంటే మొత్తం 32 వచ్చింది. కానీ 32 కాలెండరులో లేదు కదా!

నాన్న: ఇలాంటప్పుడు అంకెలను 31 తరువాత పొడిగించాలి.

మధు : అలా చేస్తే ఈ సంఖ్యల మొత్తం 4వ నిలువు వరుసలో ఉంటుంది. నేను ఈ రహస్యాన్ని విప్పనా! 1వ నిలువు వరుస, 3వ నిలువు వరుసల నుండి సంఖ్యలను ఎన్నుకున్నారనుకోండి. 1 కి 3 ని కలిపితే 4 కదా! అందే సంఖ్యల మొత్తం 4వ నిలువు వరుసలో ఉంటుందన్న మాట.

నాన్న: సరిగ్గా కనుక్కున్నావు!

మధు : నాకు మరొక సందేహం వుంది. 4వ నిలువు వరుస నుండి 11, 6వ నిలువు వరుస నుండి 20 ఎన్నుకున్నాను. వీటిని కూడితే 31 వస్తుంది.

నిలువు వరుసల సంఖ్యలు కూడితే 10 వస్తుంది. కానీ 10వ నిలువు వరుస లేదుగా!

రవి : 3వ నిలువు వరుసలో 31 ఉంది.

సుధ : 10 కూడా 3వ నిలువు వరుసలోనే ఉంది.

మధు : 10 వున్న నిలువు వరుస కోసం వెతక వచ్చు. కానీ వెతకకుండా చెప్పటం ఎట్లా?

నాన్న: నిలువు వరుసలో ఉన్న అంకెలకు, పై సంఖ్యతో సంబంధం ఉంది. అదేమిటో ఆలోచించి చెపుతారా?

రవి : ఆ! నిలువు వరుసలో సంఖ్యలు సంకలన క్రమంలో ఉన్నాయి, ప్రతి సంఖ్య పైనున్న సంఖ్యకంటే 7 ఎక్కువ.

సుధ : కడపటి నిలువు వరుసలోని సంఖ్యలు 7 గుణిజాలు

మధు : నాకు అర్థమయ్యింది. 7 అంకె గుణిజాలకన్నా ఒకటి ఎక్కువ ఉన్న సంఖ్య వస్తే, సంఖ్యల మొత్తం 1వ నిలువు వరుసలో ఉంటుంది.

నాన్న: నిలువు వరుసల్లోని సంఖ్యలను 7తో భాగిస్తే శేషం వస్తుంది. ఈ శేషం ఆయా నిలువు వరుసలోని మొదటి సంఖ్య అవుతుంది.

సుధ : కానీ 4ను 7తో ఎలా భాగిస్తాము?

రవి : నాకు తెలుసు! 4ను 7తో భాగించలేం. కానీ శేషం నాలుగు.

$$
\begin{array}{r}
0 \\
7 \overline{)\ 4} \\
\underline{0} \\
4
\end{array}
$$

మధు : సరిగ్గా చేశావు.

రవి : కాబట్టి నిలువు వరుసల మొత్తం కనుక్కునేప్పుడు 1,2,3,4,5,6,7 కీలకమైన అంకెలు అవునా?

సుధ : 7ను 7తో భాగిస్తే శేషం '0' వస్తుంది. అప్పుడు ఎలా?

నాన్న: 0 తో మొదలు పెట్టి 7 నిలువు వరుసలలో అంకెలు వేసి చూడండి.

సుధ :

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27

ఇంకా ఇట్లాగే వేసుకుంటూ పోవచ్చు. కాలెండరులోని కడపటి నిలువు వరుస మొదటి నిలువు వరస అయ్యింది. మిగిలిన నిలువు వరుసలన్నీ తరువాత స్థానానికి జరిగాయి.

నాన్న: 1వ నిలువు వరుసలోని సంఖ్యలను "శేషం శూన్యంగా గల సంఖ్యలు" లేక R_0 సంఖ్యలనీ, 2 వ నిలువు వరుసలో ఉన్న సంఖ్యలను శేషం 1 లేక R_1 సంఖ్యలనీ చెప్పవచ్చు. 0 తో మొదలుపెట్టి అంకెలను 6 నిలువు వరసల్లో రాస్తే ఏమవుతుంది?

సుధ : నేను రాస్తాను.

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23

రవి : శేషం 0 ఉన్న సంఖ్యలు, శేషం 1 గల సంఖ్యలూ, ఇలా శేషం 5 గల సంఖ్యల దాకా వస్తుంది.

నాన్న: ఇప్పుడు ఏ సంఖ్యతో భాగించాలి?

సుధ : 6 తో.

నాన్న: సంఖ్యలను 8 నిలువు వరుసలుగా విభజిస్తే ఎన్ని శేష సంఖ్యలు (**remainder number**) ఉంటాయి? అవి ఏవి?

రవి : 8 ఉంటాయి అవి $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$.

నాన్న: ఒకే శేషం మిగులుతున్న ఈ సంబంధాన్ని గాస్ "సమ శేష సంబంధం" (**conguence ralation**) అని అంటారు. దీనికి అందమైన సంకేతం కూడా ఇచ్చారు.

$9 \equiv 23$ (మాపాంకము 7). దీనిని మాపాంకము (**modulus**) 7తో తొమ్మిది 23కు సమానం అని చదవాలి.

మధు : అంటే 9, 23 సంఖ్యలను, 7 తో భాగిస్తే మిగిలే శేషం సమానం.

రవి : 9, 23 ల మధ్య భేదం 14. $2 \times 7 = 14$. కాబట్టి 9, 23 ల మధ్య భేదం 7 గుణిజం అని చెప్ప వచ్చుకదా!

నాన్న : అలా కూడా చెప్పవచ్చు. సమశేష సంబంధం సమానత సంబంధం (**equality relation**) లా ప్రవర్తిస్తుంది.

మధు : అంటే ఏమిటి?

నాన్న : $a = b$ అన్న సమానత సంబంధం చూస్తే,

$a + c = b + c$ కదా!

$c = d$ అయితే $a + c = b + d$ అవునా!

ఈ విధంగానే సమశేష సంబంధంతోనూ చెయ్యవచ్చు.

మధు : నాకు అర్థమైంది. జులై నెల 2 లోని నిలువు వరుస నుండి $9 \equiv 23$ (మాపాంకము 7) తీసుకుందాం.

$9 + 2 \equiv 23 + 2$ (మాపాంకము 7) అవుతుంది కదా!

3వ నిలువు వరుస నుండి

$10 \equiv 17$ (మాపాంకము 7) తీసుకున్నాను.

5వ నిలువు వరుస నుండి

$9 + 10 \equiv 23 + 17$ (మాపాంకము 7) తీసుకోవచ్చు.

అంటే ఇది మన నిలువు వరుసల మొత్తం ఆటన్న మాట!

రవి : "నిలువు వరుసల భేదం" ఆట లేదా!

నాన్న : ఆ ఆట కూడా ఆడొచ్చు. 5—3 ని ఎలా వివరిస్తావు?

రవి : 5 నుండి 3 ని తీసివేయాలి. లేదా –3ని 5 కు కూడాలి.

మధు : అవును తీసివేసినా లేక వ్యతిరేకాన్ని కూడినా ఒకటే!

నాన్న : కాబట్టి కూడికే తీసివేత పని కూడా చేయగలదు. అందుకే ప్రత్యేకంగా తీసివేయాల్సిన పని లేదు.

సుధ : మరి నిలువు వరుసల హెచ్చవేత ఆట మాటేమిటి? రెండవ నిలువు వరుస నుండి 9, 3వ నిలువు వరుస నుండి 3 ఎన్నుకొని హెచ్చవేస్తే

27 వస్తుంది. ఇది $2 \times 3 = 6$. కాబట్టి 6వ నిలువు వరుసలో ఉండాలి. అట్లాగే ఉందే!

నాన్న : ఇప్పుడు సమానత సంబంధం $a = b$ తీసుకో.

$ac = bc$ కదా! $c = d$ అయితే $ac = bd$ కదా!

సమశేష సంబంధంలో కూడా ఇదే విధంగా ఉంటుందా?

మధు : ఖచ్చితంగా ఉంటుంది.

1వ నిలువు వరుస నుండి

$8 \equiv 15$ (మాపాంకము 7)

ఇప్పుడు $8 \times 2 \equiv 15 \times 2$ (మాపాంకము 7) కరెక్టే.

2వ నిలువు వరుస నుండి

$2 \equiv 9$ (మాపాంకము 7)

కాబట్టి $8 \times 2 \equiv 15 \times 9$ (మాపాంకము 7)

అంటే $16 \equiv 135$ (మాపాంకము 7) అవునా?

రవి : 135—16 తీసివేస్తే అది ఏడు గుణిజం కావాలి.

$119 \equiv 17 \times 7$, అవును సరిపోయింది.

మధు : $a^2 \equiv b^2$, $a^3 \equiv b^3$ మొదలైనవి కూడా సమశేష సంబంధాలకు ఉన్నాయి. అంటే $a^n \equiv b^n$ అనొచ్చు కదూ!

నాన్న : అందుకు సందేహం లేదు.

మధు : భాగహారం మాట ఏమిటి? అంటే భిన్న సంఖ్యతో హెచ్చవేయడమే!

$a = b$ అయితే

$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ అవుతుంది. $c = d$ అయితే $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

అవుతుంది. కాని c,d లు శూన్యం కాకూడదు.

$$\frac{1}{c} \times a = \frac{1}{c} \times b \text{ అనీ } \frac{1}{c} = \frac{1}{d} \text{ అయితే}$$

$$\frac{1}{c} \times a = \frac{1}{d} \times b \text{ అనీ చెప్పవచ్చును.}$$

నాన్న: సమశేష సంబంధంతో జాగ్రత్తగా ఉండాలి. అన్నిసార్లూ భాగహారం చేయలేం. దీని గురించి మరోసారి వివరంగా తెలుసుకుందాం.

9. వారం, తేదీ !

సుధ : నాన్న ఏ తేదీనాడు ఏ వారం వస్తుందో తెలుసుకోడానికి కాలెండరు చూస్తాం. ఇలాంటివి కాలెండరు లేకుండా తెలుసుకోడానికి శేష సంఖ్యలు సహాయపడతాయా?

నాన్న: మంచి ప్రశ్న వేశావు. ఏదైనా ఒక తేదీకి వారం తెలిస్తే దాని ముందు లేదా తరువాత తేదీలు ఏ వారమో శేష సంఖ్యలతో కనిపెట్టవచ్చు. ముందులాగా జులై 1990 తీసుకుందాం.

ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

3వ తేదీ ఏ వారం?

సుధ : మంగళ వారం.

నాన్న: 3కు 7 కలుపు.

సుధ : 10.

నాన్న: 10వ తేదీ ఏ వారం?

సుధ : మంగళవారం.

నాన్న: 7 కలుపుతున్నామంటే అర్థం ఏమిటి?

రవి : వారం మారదు.

నాన్న: సరే. 6 కలిపితే?

రవి : ఆ వారానికి ముందు రోజు.

నాన్న: 8 కలిపితే?

రవి : ఆ వారానికి మరుసటి రోజు.

నాన్న: 1 కలపటమంటే

సుధ : ఆ వారానికి మరుసటి రోజు

మధు : 8 కలిపినా, 1 కలిపినా, మరుసటి రోజే వస్తుంది. నాకు అర్థంఅయ్యింది 8, 1 R_1 సంఖ్యలు.

రవి : దీంట్లోని క్రమపద్ధతి నాకు అర్థమైంది.

1 9 17 25. ఒకటికి 8 కలుపుకుంటూపోతే

ఈ సంఖ్యలు వస్తాయి. 1 ఆదివారం అందువల్ల 9 సోమవారం 17 మంగళవారం, 25 బుధవారం వస్తాయి.

సుధ : నేను మరో క్రమ పద్ధతిని కనుక్కున్నాను.

6 12 18 24 30.

6 కలుపుకుంటూ పోతే ఈ సంఖ్యలు వస్తాయి. 6 వ తేదీ శుక్రవారం కాబట్టి 12 గురువారం, 18 బుధవారం, 24 మంగళవారం, 30 సోమవారం అవుతాయి.

మధు : దీన్ని 7తో భాగిస్తే శేష సంఖ్యలు 6,5,4,3,2 వస్తాయి అందుకే వారాలు వెనక్కు తగ్గుతున్నాయి.

సుధ : చాలా సరదాగా ఉంది.

నాన్న: 9వ తేదీ ఏ వారం?

సుధ : సోమవారం.

నాన్న: 11 రోజుల తరవాత ఏ వారం?

సుధ : $9 + 11 = 20$, 20 వ తేదీ శుక్రవారం.

రవి : శేష సంఖ్యలను బట్టి చూద్దాం. 9 అంటే శేషం 2 గా గల సంఖ్య

(మాపాంకము 7) 11 అంటే శేషం 4గాగల సంఖ్య (మాపాంకము7). $9 + 11$, $2 + 4$ సర్వసమానం (**congruent**) $2 + 4 = 6$. 6వ తేదీ శుక్రవారం కాబట్టి 20వ తేదీ శుక్రవారం

మధు : జులై 15 ఆదివారం. 15 R_1 సంఖ్య. 23 రోజుల తరువాత ఏ వారమవుతుంది.

సుధ : 23 అంటే శేషం 2 గాగల సంఖ్య. 1,2 కూడితే 3. శేషం 3 వున్న సంఖ్యలు మంగళవారం అవుతాయి.

రవి : నేను కాలెండరులో చూస్తాను. జులై 15 తరువాత 23 రోజులంటే

$$15 + 23 = 38$$

$$31 + 7 = 38 \qquad \text{(ఆగస్టు 7)}$$

ఆగస్టు 7వ తేదీ మంగళవారమే. కాబట్టి జవాబు సరిగ్గానే ఉందే.

మధు : అంటే జులై నెలతో ఆ సంవత్సరంలో ఏ తేదీకైనా వారం చెప్పగలం. అవునా?

నాన్న: ఆ సంవత్సరంలోనే కాదు ఏ సంవత్సరంలోని ఏ తేదీకైనా వారం చెప్పవచ్చు. కానీ దీనికి "గ్రెగోరియన్" (**Gregorian**) కాలెండరు కావాలి. మీకు జూలియన్ (**Julian**) గ్రెగోరియన్ కాలెండర్లు గుర్తున్నాయా?

రవి : ఇంతకు ముందు మీరు చెప్పారు. గుర్తున్నాయి. కానీ నాదొక ప్రశ్న. జులై నెలే ఎందుకు తీసుకోవాలి నాన్నా? ఏ నెల అయినా తీసుకుని ఏ తేదీకైనా వారం చెప్పలేమా?

నాన్న: కొన్నిసార్లు వెనక్కి వెళ్ళాల్సి వస్తుంది. ఒక శేష సంఖ్యను, మరో శేష సంఖ్య నుండి తీసివెయ్యవచ్చు. కాబట్టి రవి అడిగినట్లు చెయ్యవచ్చు. ఒక ఉదాహరణను చూద్దాం.

సుధ : జూన్ 17 ఆదివారం 11 రోజులు ముందు ఏ వారం అవుతుంది? $17 - 11 = 6$. 6వ తేదీ బుధవారం. కానీ దీనిని శేష సంఖ్యలతో చెయ్యాలి. 17 శేషం 3, 11 శేషం 4. ఇప్పుడు 3-4 కనుక్కోవాలి. 3,10 సర్వ సమానం. కాబట్టి 3-4కు బదులు 10-4 కనుక్కోవచ్చు.

ఇది 6. 6వ తేదీ బుధవారం కాబట్టి సరిగ్గానే వుందికదా!

రవి : మార్చి 6 వ తేదీ మంగళవారం. 40 రోజుల ముందు ఏ వారం అవుతుంది?

సుధ : 40 శేషం 5. 6-5 = 1

మధు : మార్చి 1 వ తేదీ గురువారం. కాబట్టి మార్చి 6 వ తేదీకి 40 రోజుల ముందు గురువారం అవుతుంది, కానీ నెల మారుతుంది.

సుధ : వెనక్కు లెక్కపెడుతూ పరిశీలించాలి.

మార్చి						గురు ఫిబ్రవరి				
6	5	4	3	2	1	28	27	26	25	24
	23	22	21	20	19	18	17	16	15	24
	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
			గురు జనవరి							గురు
	3	2	1	31	30	29	28	27	26	25

మార్చి 6 కు 40 రోజులు ముందు అంటే జనవరి 25. అవును గురువారమే.

నాన్న: సరే 1-1-1991 ఏ వారం అవుతుంది?

రవి : 1-1-90 సోమవారం. 365 రోజుల తరువాత వచ్చేరోజు ఏ వారమో కనుక్కోవాలి? ఈ లెక్క చేసేటప్పుడు లీపు సంవత్సరాలలో 366 రోజులుంటాయని గుర్తుంచుకోవాలి.

నాన్న: ఒక్క నిముషం ఆగు. 365 = 52 R_1 కాబట్టి 365 శేషం 1. 1 శేషం 1. 1 + 1 = 2 అంటే మంగళవారం. కాబట్టి 1-1-91 మంగళవారం

రవి : ఒక క్షణం ఆగు. కాలెండరుతో పోల్చి చూస్తాను. 31-12-1990 సోమవారం. అంటే 1-1-91 మంగళవారం. సరిగ్గానే వచ్చిందే!

సుధ : ఇప్పుడు 1-1-89 ఏం వారమో చెప్తారా?

రవి : 1-1-90 సోమవారం. 365 రోజులకు ముందు ఏ వారమో కనుక్కోవాలి.

సుధ : $\frac{365}{7} = 52\ R_1$

365 శేషం 1. కాబట్టి 1-1 = 0. 0 లేదా 7 అంటే ఆదివారం.

రవి : గోడ మీద ఉన్న కాలెండరుతో సరి పోలుస్తాను ఉండండి. ఆ! అవును. 1-1-89 ఆదివారమే!

మధు : శేష సంఖ్యల అద్భుతమైన లక్షణాలతో చిన్న కాలెండరును చెయ్యగలమా?

నాన్న: చెయ్యవచ్చు. పోస్ట్‌కార్డ్ అంత చిన్న కాలెండరు చెయ్యగలం.

రవి : భలే భలే. ఎలా చెయ్యాలో మాకు కొన్ని సూచనలు ఇవ్వండి.

నాన్న: అది అన్నీ తేదీలను చూపాలి.

సుధ : అంటే 1 నుండి 31 వరకు

నాన్న: ప్రతి నెలలో ఎన్ని రోజులున్నాయో గుర్తుందా?

రవి :

జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రిల్	మే	జూన్
31	28 లేదా 29	31	30	31	30
జూలై	ఆగస్టు	సెప్టెంబర్	అక్టోబర్	నవంబర్	డిశంబర్
31	31	30	31	30	31

నాన్న: తరువాత ప్రతినెలా 1 వ తేదీ ఏ వారమో నిర్ణయించాలి.

రవి : సరే. శేష సంఖ్యలు ఉపయోగించి కనిపెడతాను.

సుధ : అయితే జనవరి 90 కాగితం మాత్రం మీరు ఉంచుకొని మిగిలిన కాలెండరు కాగితాలు నాకు ఇవ్వండి. మీ సమాధానాలు సరైనవేనో కాదో పరీక్షిస్తాను.

రవి : జనవరి 1 వ తేదీ సోమవారం

ఫిబ్రవరి 1 అంటే 31 రోజుల తరువాత, $31 = R_3$. కాబట్టి $1 + 3 = 4$, 4 గురువారం. ఫిబ్రవరి 1 గురువారం.

సుధ : అవును.

రవి : మార్చి 1, 28 రోజుల తరువాత $28 = R_0$, $4 + 0 = 4$. 4 గురు వారం. కాబట్టి మార్చి 1 వ తేదీ కూడా గురువారమే!

సుధ : అవును

రవి : 31 రోజుల తరువాత ఏప్రిల్ 1 వ తేదీ $31 = R_3$ కాబట్టి $4 + 3 = 7$ 7 ఆదివారం కాబట్టి ఏప్రిల్ 1 వ తేదీ ఆదివారం

సుధ : అవును.

రవి : మిగిలినవి కూడా లెక్కగట్టి చెబుతానుండు.

మే 1 మంగళవారం

జూన్ 1 శుక్రవారం

జులై 1 ఆదివారం

ఆగస్టు 1 బుధవారం

సెప్టెంబరు 1 శనివారం

అక్టోబర్ 1 సోమవారం

నవంబర్ 1 గురువారం

డిశంబర్ 1 శనివారం

సుధ : అన్నీ కరెక్టే

మధు : జనవరీ, అక్టోబరు లు సోమవారంతో, మే 1 మంగళవారంతో. ఆగస్టు 1 బుధవారం తో, ఫిబ్రవరి, మార్చి, నవంబరు గురువారం తో జూన్, డిశంబరు శుక్రవారం తో, సెప్టెంబర్, జులై శనివారంతో ఏప్రెల్ ఆదివారం తో మొదలయ్యాయి.

నాన్న: జనవరి నెల 1, ఫిబ్రవరి 2 అనుకుంటూ పోతే దీనిని ఈ కింది విధంగా రాయవచ్చు:

1, 10	సోమ
5	మంగళ
8	బుధ
2, 3, 11	గురు
6,	శుక్ర
9, 12	శని
4, 7	ఆది

జనవరిని మాత్రం చూసి మిగిలిన నెలల 1వ తేదీ ఏ వారమో చెప్పినట్టు, జనవరి కాలెండరుతో సంక్షిప్త రూపంలో మిగిలిన నెలలకు కూడా కాలెండరు రాయవచ్చు. ఒక విధానం ఇదిగో :

జనవరి 1990

	ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
		1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27
	28	29	30	31			
నెలలు							
1, 10	7	1	2	3	4	5	6
5	1	2	3	4	5	6	7
8	2	3	4	5	6	7	1
2, 3, 11	3	4	5	6	7	1	2
6	4	5	6	7	1	2	3
9, 12	5	6	7	1	2	3	4
4, 7	6	7	1	2	3	4	5

సుధ : ఉదాహరణకు 21-9-90 తేదీ తీసుకుందాం.
ఈ సంక్షిప్త కాలెండరును ఉపయోగించి వారం కనుక్కోవటం ఎలా?

మధు : 9వ నెలకు సరిగా 21 వ తేదీకి చూస్తే 5 అంకె ఉంది. జనవరి లో 5 శుక్రవారం కాబట్టి 21-9-90 శుక్రవారం

రవి : నాకు ఏదైనా ఒక తేదీ ఇవ్వు వారం చెబుతా!

సుధ : 24-11-90

రవి : 24వ తారీకుకూ, 11వ నెలకూ తిన్నగా చూస్తే 6 అంకె ఉంది. జనవరి లో 6 శనివారం. కాబట్టి 24-11-90 శనివారం.

సుధ : అవును !

మధు : మనం ఇంకా చిన్న కాలెండరును చెయ్యలేమా ? నాకో మార్గం తట్టింది. జనవరి నెల శేష సంఖ్య రావాలంటే మిగిలిన నెలల శేష సంఖ్యలకు ఎంత కూడాలో మొదట తెలుసుకోవాలి.

1, 10 నెలలకు	0 లేదా 7 ను కలపాలి.
5 వ నెలకు	1 ని కలపాలి
8 వ నెలకు	2 ని కలపాలి
2, 3, 11 నెలలకు	3 ని కలపాలి
6 వ నెలకు	4 ని కలపాలి
9, 12 నెలలకు	5 ని కలపాలి
4, 7 నెలలకు	6 ని కలపాలి

రవి : దీనివల్ల లాభం ఏమిటి ?

మధు : ముందులాగా జనవరి కాలెండరు తీసుకుని కింద శేష సంఖ్యలు ఆరోహణ (**ascending**) క్రమంలో ఉండేట్లు అన్ని నెలలూ వేయాలి. ఇదుగో :

జనవరి 1990

	ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
		1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27
	28	29	30	31			
నెలలు	1	5	8	2	6	9	4
	10			3		12	7
				11			

రవి : నాకు ఆదివ్వు. ఒక తేదీ చెప్పు, వారం చెబుతాను.

మధు : సరే, 12.3.90

రవి : 12 ≡ 5, (మాపాంకము 7) 3 → 3, (నెల సంఖ్య ఉన్న నిలువు వరుసలోని పై సంఖ్య) 5 + 3 = 8, 8 ≡ 1
1 సోమవారం కాబట్టి మార్చి 12వ తేదీ సోమవారం. అవునా?

మధు : ఎలా చేయాలో నీకు వచ్చేసింది.

సుధ : నన్ను కూడా చెయ్యనివ్వండి.

రవి : 19.8 1990 ఏ వారం?

సుధ : 19 ≡ 5; 8 → 2 5 + 2 = 7, 7 ≡ 0.
7 ఆదివారం కాబట్టి ఆగస్టు 19 వ తేదీ ఆదివారం.

మధు : కాలెండరును ఇంకా చిన్నదిగా చెయ్యవచ్చనుకుంటాను. అన్ని తేదీలూ ఉండాల్సిన అవసరం ఏమిటి? మనకు కావలసింది తేదీకి శేష సంఖ్య.

రవి : నీవన్నది అర్థమైంది నేను వేసి చూపిస్తానుండు చిన్న కాగితం పైన దీనిని వెయ్య వచ్చు.

జనవరి 1990

	ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
	0 లేదా 7	1	2	3	4	5	6
	1	5	8	2	6	9	4
	10			3		12	7
				11			

సుధ : చాలా బాగుంది. నాన్న. ప్రతి సంవత్సరం ఇలాంటి చిన్న కాలెండర్లను అచ్చువేయిస్తే మనం స్నేహితులకు బహుమతిగా ఇవ్వవచ్చు.

10. కొన్ని గణిత రూపాలు

నాన్న: 1,2,3,4,5,6ల శేషాల సమితి (**set**) వారం, నిలువు వరుసల మొత్తం వరుసల భేదం, వరుసల లబ్ధం (**product**) కనిపెట్టడంలో ఇది ఎంత ముఖ్యమైన పాత్ర వహించిందో చూశాం. ఇప్పుడు వీటి లక్షణాలను పరిశీలిద్దాం. మొదట సంకలన (కూడిక) పట్టిక (**addition table**) చూద్దాం.

రవి : దీనిని నేను తయారు చేస్తాను.

సుధ : కాలెండరు కావాలా?

రవి : అవసరం లేదు. ఇదిగో సంకలన పట్టిక.

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

సుధ : ఈ పట్టికలో విచిత్రమైన కూడికలు ఉన్నాయే.

+	5
3	1

రవి : 3, 5 సాధారణ సంఖ్యలుగా భావించి కూడితే వాటి మొత్తం కాదు. కాని 3, 5 లను శేషాలుగా భావిస్తే (7 తో భాగిస్తే వచ్చే శేషాలు) $3+5=1$ అవుతుంది.

సుధ : ఓహో! అలాగా! 3 శేషం ఇచ్చే సంఖ్యనూ, 5 శేషం ఇచ్చే సంఖ్యనూ కూడితే వచ్చే సంఖ్య శేషం 1 గల సంఖ్య అవుతుంది.

రవి : ఒక ఉదాహరణ చెప్పగలవా?

సుధ : 7 గుణిజాలకు 3, 5 కూడాలి.

$14+3=17$, (R_3 సంఖ్య), $21+5=26$ (R_5 సంఖ్య)

ఇప్పుడు $17+26=43$, $43 =$ శేషం 1 (మాపాంకము 7)

(43 ను 7 తో భాగించినప్పుడు శేషం 1 గల సంఖ్య అని అంటారు)

మధు : సున్నా కూడా 7 గుణిజం. కాబట్టి దీనికి 3, 5 కూడి వీటిని 7 తో భాగిస్తే శేషాలు 3, 5 వస్తాయి. 3, 5 మొత్తం 8; 8 శేషం 1 వచ్చే సంఖ్య.

సుధ : నాకు అర్థమైంది.

నాన్న: దీంట్లో ఇంతకన్నా ఆసక్తికరమైన విషయాలున్నాయి. 3 కు ఏ సంఖ్య కూడితే, మొత్తం సున్నా అవుతుంది?

రవి : అలాంటి పూర్ణ సంఖ్య (**whole number**) లేదు.

నాన్న: సంజ్ఞా సంఖ్య (**integer**) అలో?

రవి : నాకు తెలుసు అది -3 కదూ!

నాన్న: ఇప్పుడు శేషాల సమితిలో?

రవి : 3 కు ఏ సంఖ్యను కలిపితే సున్నా అవుతుంది? పట్టిక చూస్తే 4 అని ఉంది.

మధు : ఓహో సంఖ్యల వ్యతిరేకాలు [**opposite**] కూడా పట్టికలోనే ఉన్నాయి కదూ!

నాన్న: అద్భుతంగా లేదూ! 0 తప్ప మిగిలిన ఏ సంఖ్యకూ వ్యతిరేక సంఖ్య ఉండదు. అందుకే సంజ్ఞా సంఖ్యల అవసరం ఏర్పడింది. కాని 2 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మాపాంకము గల శేషాల సమితిలో శేషాల వ్యతిరేకాలు శేషాలనుండే దొరుకుతాయి. మాపాంకము 7తో శేషాలనూ వాటి వాటి వ్యతిరేకాలనూ రాయి.

రవి : నేను రాస్తాను.

శేషాలు	0	1	2	3	4	5	6
వ్యతిరేకాలు	0	6	5	4	3	2	1

సున్నా తప్ప మిగిలినవి పూరకాలు (**complements**)

నాన్న: 0 నుండి 6 వరకు సంఖ్యల వర్గాలు తీసుకొని, వాటిని 7తో భాగిస్తే వచ్చే శేషాలు లెక్కగట్టండి.

రవి : నేను వీటిని 7కు పూరక జతలుగా తీసుకుంటాను.

$1^2 \equiv 1$ (మాపాంకము 7)
$6^2 \equiv 1$ (మాపాంకము 7)

$2^2 \equiv 4$ (మాపాంకము 7)
$5^2 \equiv 4$ (మాపాంకము 7)

$3^2 \equiv 2$ (మాపాంకము 7)
$4^2 \equiv 2$ (మాపాంకము 7)

ఆశ్చర్యంగా ఉందే! పూరకాలు విడిపోలేదు.

మధు : 1,2,4 మాత్రమే శేషాలుగా వచ్చాయి.

నాన్న: 1,2,4 వీటిని వర్గావశేషాలని (**quadratic residues**) అంటారు.

3,5,6 వీటిని వర్గావ అవశేషాలని (**quadratic non-residues**) అంటారు. ఇవి గాస్‌లో ఎంతో ఆసక్తిని రేకెత్తించాయి.

మధు : ప్రతి మాపాంకానికీ కొన్ని వర్గావశేషాలూ, కొన్ని వర్గావ అవశేషాలూ ఉంటాయి.

నాన్న : అవును. ఇప్పుడు సంఖ్యల సమితిలో తీసివేతనూ, శేషాల (మాపాంకము 7) సమితిలో తీసివేతనూ పరిశీలిద్దాం. సంఖ్యల సమితిలో 2-5కు సమాధానం ఎంత?

రవి : దీనికి పూర్ణ సంఖ్యల సమితిలో జవాబు లేదు. సంజ్ఞా సంఖ్యలలో అయితే $2-5 = -3$

నాన్న : శేషాల సమితి (మాపాంకము 7)లో $2-5$ ఎంత?

మధు : 5కు ఎంత కూడితే మొత్తం 2 అవుతుంది? పట్టికలో చూస్తే 4 అని తెలుస్తుంది.

+	5
4	→ 2

కాబట్టి శేషాల సమితిలో ఒక శేష సంఖ్య నుండి మరొక శేష సంఖ్యను తీసివేయవచ్చు. వచ్చే సమాధానం కూడా శేష సంఖ్యయే.

నాన్న : ఈ శేష సంఖ్యలలో మరొక విచిత్రమైన విషయం వుంది.

2,4,6 సాధారణ సంఖ్యలైతే,

$6-4 = 2, \qquad 4-2 = 2$

2,4,6 శేష సంఖ్యలనుకో. సంకలన పట్టిక (మాపాంకము 7) చూసి వీటి మధ్యనున్న సంబంధాన్ని చూద్దాం.

రవి : $6-4 = 2, \qquad 6-2 = 4$ అని వుంది,

మధు : అంతేకాదు. $4-6 = 5$ అనీ, $2-6 = 3$ అనీ ఉంది. ఇదేం బాగోలేదు. ఎందుకంటే వీటివల్ల $6>4$, $4>6$ అనీ, $6>2$, $2>6$ అనీ అర్థం వస్తుంది.

నాన్న : ఆరోహణ లేదా అవరోహణ (**descending**) క్రమంలో శేషసంఖ్యలను

రాయలేమన్నది తెలిసిన విషయమే! అవశేషాల (**residues**) కూ శేష సంఖ్యలకూ క్రమ లక్షణాలు లేవు. ఇప్పుడు వీటి గుణన లక్షణాలను పరిశీలిద్దామా?

రవి : నేను గుణన పట్టిక (**multiplication table**) తయారుచేస్తాను.

సుధ : ఇప్పుడైనా కాలెండరు కావాలా?

రవి : కాలెండరు లేకుండానే పట్టిక రాయగలను. కానీ త్వరగా రాయాలంటే కాలెండరు కావాలి.

×	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

ఇదిగో పట్టిక తయారైంది.

సుధ : నేను పరీక్షించనా? శేష సంఖ్య 6 శేష సంఖ్య 4ను హెచ్చవేస్తే శేష సంఖ్య 3 వస్తుంది.

శేషం 6 ఉండే సంఖ్య $= 13$

శేషం 4 ఉండే సంఖ్య $= 11$

వీటిని హెచ్చిస్తే $13 \times 11 = 143$ వస్తుంది.

$\frac{143}{7} = 20$, శేషం 3.

కాబట్టి 143 శేషం 3 వచ్చే సంఖ్య

నాన్న : సంఖ్యల సమితిలో $3 \times \square = 5$ అన్న సమీకరణానికి (**equation**) సమాధానం లేదు. కానీ శేషాల సమితి (మాపాంకము 7) లో సమా

ధానం ఉంది. అది ఏమిటి?

రవి : పట్టికలో $3 \times 4 = 5$ అని ఉంది. కాబట్టి సమాధానం 4.

మధు : నాకు తెలిసింది. పూర్ణ సంఖ్యలకు 1 భాజకంగా తీసుకుని వాటిని భిన్నాంకాలు (**fraction numbers**) గా పరిగణించాల్సిన అవసరం ఇక్కడ లేదు. పూర్ణ సంఖ్యలో సమితిలో మాదిరి శేష సంఖ్యలను ఇంకో శేష సంఖ్య (0 తప్పించి) తో భాగహారం చేసి సమాధానం కనుక్కోవచ్చు.

నాన్న: మీకు అకరణీయ సంఖ్య (**rational number**) లు తెలుసు. పూర్ణాంకా లను, సున్నా తప్ప మిగిలిన పూర్ణాంకాలతో భాగిస్తే ఈ సంఖ్యలు వస్తాయి. మొదటి అకరణీయ సంఖ్య అనీ, కడపటి అకరణీయ సంఖ్య అనీ ఉండవు. కాబట్టి అకరణీయ సంఖ్యల సమితి అనంత (**infinite**) మైనది. చిత్రమైన విషయం ఏమిటంటే శేషాల సమితి (మాపాంకము 7) పరిమిత (**finite**) సమితి. కాని ఇది ఒక అపరిమితమైన సమితిలా ప్రవర్తిస్తుంది. అంటే వీటితో ....

రవి : కూడిక, తీసివేత, హెచ్చవేత శేషం లేని భాగహారం చెయ్యవచ్చు.

సుధ : ఇది చాలా బాగుంది. ఒకే సమితిలో నాలుగు ప్రక్రియలనూ చేయగలిగితే ఆ సమితిని ఏమంటారు?

నాన్న: గణిత శాస్త్ర పరిభాషలో దీనిని క్షేత్రమని (**field**) అంటారు.

మధు : నాకొక సందేహం. చిన్న మాపాంకము తీసుకుంటే చిన్న సమితులు వస్తాయి కదా!

నాన్న: అవును అతి చిన్న సమితి కూడా చేయవచ్చు

మధు : మాపాంకము 2 శేషాల సమితిలో 0,1 మాత్రమే ఉంటాయి.

సుధ : 6 నిలువు వరుసల్లో అంకెలు రాస్తే ఏమవుతుంది?

నాన్న: రాసి చూడు '0' తో మొదలు పెట్టు.

సుధ : 0 నుండి 5

ఇదుగో :

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35.......

నాన్న: శెభాష్. శేష సంఖ్య లేవి?

సుధ : 0, 1, 2, 3, 4, 5

నాన్న: ఇప్పుడు చూడు. నేనొక సంఖ్య ఇస్తే అది ఏ నిలువు వరుసలో ఉంటుందో చెప్పగలవా?

రవి : ఒక సంఖ్య ఇవ్వండి.

నాన్న: 113

రవి : $\frac{113}{6} = 18$, శేషం 5

మధు : అంటే $113 \equiv 5$ (మాపాంకము 6)

సుధ : 5 మొదటి సంఖ్యగా ఉన్న చివరి (6వ) నిలువు వరుసలో 113 ఉంటుంది.

నాన్న: కాబట్టి ప్రతి సంఖ్యకూ ఏదో ఒక నిలువు వరుసలో స్థానం ఉంటుంది. ఒప్పుకుంటావా?

రవి : ఒప్పుకుంటాను.

నాన్న: ఒకే సంఖ్య రెండు నిలువు వరుసల్లో ఉంటుందా?

సుధ : ఉండదు.

మధు : ఇక్కడ 6 శేష సమితులున్నాయి. ఏ రెండింటిలోనూ సామాన్యసంఖ్య లేదు.

నాన్న: అవును. గణిత శాస్త్ర పరిభాషలో ఈ విధంగా రాయడాన్ని, విభాగ

మనీ (**partitioning**), ఉపసమితిని (**subset**) వియుక్త ఉపసమితి (**disjoint**) అనీ అంటారు.

మధు : నాకు తెలిసింది. సంఖ్యలను కొన్ని నిలువువరుసల్లో రాయడం వల్ల ఎన్ని విచిత్రాలు జరుగుతున్నాయి.

1. మాపాంకము నిర్ణయ మవుతుంది. ఎన్ని నిలువు వరుసలు ఉన్నాయో మాపాంకము కూడా అంతే.
2. ఆ మాపాంకానికి పరిమిత శేషాల సమితి ఉంటుంది.
3. సంఖ్యల సమితి వియుక్త ఉపసమితులుగా ఏర్పడుతుంది.

రవి : అంతేకాదు! నిలువు వరుసల మొత్తం, నిలువువరుసల భేదం, నిలువు వరుసల లబ్ధాల ఆటలు ఆడుకోవచ్చు.

నాన్న: మాపాంకము 7 శేషాల సమితిలో లేదా 7 అంకగణితం (**arithmetic**) లో కూడిక, తీసివేత, హెచ్చవేత, శేషం లేని భాగహారం మొదలైనవి చెయ్యవచ్చని చూశాం. మాపాంకము 7 శేషాల సమితి ఒక క్షేత్రం. ఇది వేరొక మాపాంకానికి కూడా వర్తిస్తుందో లేదో చూద్దాం. ఇప్పుడు మాపాంకము 6 శేషాల సమితిని చూద్దాం.

రవి : శేషాలు 0, 1, 2, 3, 4, 5 కూడిక, హెచ్చవేతలకు పట్టిక తయారు చేయాలి కదా!

సుధ : కూడిక పట్టిక నేను వేస్తాను.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

రవి : ఇది మాపాంకము 7 కూడిక పట్టిక లాగానే ఉంది.

మధు : కాబట్టి కూడిక, తీసివేతకు సమాధానాలు చెప్పవచ్చు.

సుధ : ఇప్పుడు హెచ్చవేత పట్టిక తయారు చేస్తాను.

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

రవి : ఇది మాపాంకము 7 గుణన పట్టికలాగా లేదు.

నాన్న: నీవు బాగానే గుర్తుపట్టావు. కొన్ని భేదాలను చెప్పగలవా?

మధు : $3 \times 2 = 0$; $3 \times 4 = 0$. ఇలాంటివి మాపాంకము 7 గుణన పట్టికలో లేవు. ఇలాంటి లబ్ధాలు సంఖ్యల సమితి, భిన్నాంకాల సమితి, పూర్ణాంకాల సమితి, అకరణీయ సంఖ్యల సమితి మొదలైన వాటిలో రావు. వీటిలో సున్నా కాకుండా రెండు సంఖ్యలను హెచ్చవేసినప్పుడు సున్నా రానేరాదు. ఇంకోవిధంగా చెప్పాలంటే ఈ సమితుల్లో శూన్యానికి భాజకాలు (**diviser**) లేవు.

నాన్న: సరే! ఈ మాపాంకము 6 గుణన పట్టిక నుండి $2 \times \square = 4$కు సమాధానం చెప్పగలరా?

రవి : దీనికి రెండు సమాధానాలున్నాయి.

$$2 \times 2 = 4$$
$$2 \times 5 = 4$$

కాబట్టి జవాబు 12 లేదా 5.

నాన్న: 3/4 కనిపెట్టగలరా? అంటే $4 \times \square = 3$.

మధు : దానికి సమాధానం లేదు.

$$4 \times 0 = 0;\ 4 \times 1 = 4\ \ 4 \times 2 = 2$$
$$4 \times 3 = 0\ \ 4 \times 4 = 4\ \ 4 \times 5 = 2$$

కాబట్టి 3 లబ్ధంగా రానేరాదు.

రవి : కాబట్టి మాపాంకము 6 సమితిలో ప్రతిసారీ భాగహారం చెయ్యలేం.

నాన్న: నీవు తెలివైనవాడివే! మాపాంకము6 శేషాల సమితిలో కూడిక, తీసివేత హెచ్చవేత చెయ్యగలం. కానీ భాగహారం మాత్రం అన్నిసార్లు చెయ్యలేం.

మధు : కాబట్టి ఇది క్షేత్రం కాదు.

నాన్న: అవును. నీవు సరిగ్గా చెప్పావు. దీనిని వలయమని (ring) అంటారు.

మధు : శేషాల సమితి వలయమా క్షేత్రమా అని ఎలా కనుక్కోగలం?

నాన్న: ఇది మంచి ప్రశ్న.

సుధ : కూడిక పట్టికా, గుణన పట్టికా రూపొందించి వలయమా, క్షేత్రమా అని పరీక్షించవచ్చు.

రవి : గుణన పట్టిక చాలనుకొంటాను.

మధు : అవును. కానీ అది క్రమతో కూడుకున్నపని.

రవి : నాకొక, సమాధానం తట్టింది. బేసి సంఖ్యల మాపాంకము క్షేత్రం, సరిసంఖ్యల మాపాంకము వలయమనుకుంటాను.

నాన్న: అది అంత తేలిక కాదు. మాపాంకము 4, మాపాంకము 5, మాపాంకము 9 లకు కూడిక పట్టిక గుణన పట్టికలు తయారు చేసి చూడండి.

మధు : ప్రతి మాపాంకానికీ రెండు పట్టికలూ తయారు చెయ్యాలా? గుణన పట్టిక చాలదా?

నాన్న: సరే ప్రయత్నించి చూడండి.

రవి : మొదట మాపాంకము 9 కి గుణన పట్టిక రూపొందిస్తాను.

సుధ : ఇంతలో మాపాంకము 4, మాపాంకము 5 లకు గుణన పట్టిక నేను తయారు చేస్తాను.

రవి :

× 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1

సుధ :

× 4	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

× 5	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

రవి : మాపాంకము 9 గుణన పట్టిక మాపాంకము 6 గుణన పట్టిక లాగే ఉంది. కాబట్టి నేను ఊహించినది తప్పు.

సుధ : మాపాంకము 5 గుణన పట్టిక, మాపాంకము 7 గుణన పట్టికమాదిరే ఉంది.

మధు : మాపాంకము 4, మాపాంకము 6, మాపాంకము 9 గుణన పట్టికలు ఒకరకం. మాపాంకము 5, మాపాంకము 7, గుణన పట్టికలు మరో రకం అవుతాయి. ఆ 1 నాకు తెలిసింది. 4, 6, 9 లు సంయుక్త సంఖ్యలు (composite number) వీటికి రెండుకన్నా ఎక్కువ కారణాంకాలు (factors) ఉంటాయి. కూడిక, హెచ్చవేతలకు అభాజ్య సంఖ్యల (primenumbers) శేష సమితి క్షేత్రమూ, సంయుక్త సంఖ్యల శేష సమితి వలయమూ అవుతాయి.

నాన్న: ఒక గొప్ప విషయాన్ని కనిపెట్టారు. ఆసక్తికరమైన మరొక అంశం ఉంది. సంఖ్యలను ఒక క్రమంలో రాయండి. దీని కింద మాపాంకము 8 శేషాలను క్రమంలో రాయండి.

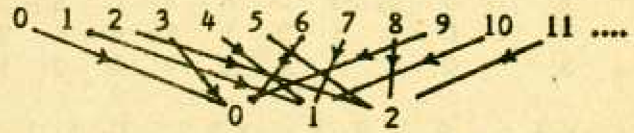
రవి : ఇదిగో

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10....

0 1 2

నాన్న: వీటిని 'ఒకే శేషం గల' అన్న సంబంధంతో జోడించండి.

సుధ : నేను చేస్తాను.



నాన్న: గణితశాస్త్రం పరిభాషలో పూర్ణ సంఖ్యలను "ప్రదేశం" (**domain**) అనీ, శేషాలను "సహప్రదేశం" (**co-domain**) అనీ, ఈ రెండింటి మధ్య సంబంధాన్ని చూపే బాణాలను "ప్రతిసర్జనం" (**mapping**) అనీ అంటారు.

మధు : 0, 3, 6, 9 .... 0 వైపు ప్రతిసర్జించాయి.
1, 4, 7, 10 .... 1 వైపు ప్రతిసర్జించాయి.
2, 5, 8, 11 .... 2 వైపు ప్రతిసర్జించాయి.

నాన్న: ఇది ఏ రకమైన ప్రతిసర్జనము?

మధు : ఒక్కొక్క శేషం పై ఒకటి కన్నా ఎక్కువ పూర్ణసంఖ్యలు ప్రతిసర్జింపబడినాయి. శేషాలన్నీ ఉపయోగించబడినాయి. కాబట్టి ఇది 'ఎన్నో - ఒకటి, ప్రతిసర్జనం' [**many-one, onto mapping**] ఇది సాధారణమైన సంబంధం కాదు. ఇది ప్రమేయ సంబంధం. అవునా?

నాన్న: సరిగ్గా చెప్పావు. ఇప్పుడు సంఖ్యలకు 0, 1, 2 ప్రతిబింబాలు అనుకుంటే 5, 10 ల ప్రతిబింబాలు ఏవి?

రవి : 2, 1 వాటి ప్రతిబింబాలు.

నాన్న: $(5+10)$ అంటే 15. దీని ప్రతిబింబం?

రవి : 0

సుధ : $0 = 2 + 1$

మధు : అంటే $2+1$ ప్రతిబింబాల మొత్తం 0
మొత్తం యొక్క ప్రతిబింబం, ప్రతిబింబాల మొత్తం రెండూ సమానమే.

రవి : లబ్ధాలకు కూడా ఇలాగే ఉంటుందా? ప్రయత్నించి చూద్దాం. 5, 10 ల ప్రతిబింబాలు 2, 1. $5 \times 10 = 50$. దీని ప్రతిబింబం 2. 2, 1 ల లబ్ధం 2

మధు : కాబట్టి లబ్ధాల ప్రతిబింబం, ప్రతిబింబాల లబ్ధం కూడా ఒకటే.

నాన్న: ఈ రూపాంతర ప్రవర్తన (**structural property**) ను "సమరూపత" (**homo morphism**) అని గణిత శాస్త్రజ్ఞులు అంటారు. అభాజ్య సంఖ్యల మాపాంకము గుణన పట్టిక నుండీ, సంఖ్యల విశిష్టమైన భాగహార లక్షణం బయట పడుతుంది.

మధు : ఏమిటది?

నాన్న: ఉదాహరణకు మాపాంకము 5 గుణన పట్టికలో 0 ఉన్న నిలువు, అడ్డ వరుసలను తొలగించి చూడండి.

సుధ : ఇదుగో

× 5	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

1, 2, 3, 4 ఉన్న లాటిన్ చతురస్రం వచ్చింది.

నాన్న: మాపాంకము 5 లో $3 \times 1 = 3$, $3 \times 2 = 1$, $3 \times 3 = 4$, $3 \times 4 = 2$ వచ్చాయి. వీటి అన్నింటినీ హెచ్చవేయి.

రవి : $3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 4 = 3 \times 1 \times 4 \times 2$ మాపాంకము 5.

మధు : దీన్ని ఇలా కూడా రాయొచ్చు.
$3^4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ (మాపాంకము 5)

నాన్న: ఇంకేమైనా సంక్షిప్త పరచగలమా?

మధు : ఇది అభాజ్య సంఖ్య మాపాంకము. కాబట్టి రెండువైపులా

$1 \times 2 \times 3 \times 4$ తో భాగిస్తే ,

$3_4 \equiv 1$ (మాపాంకము 5) అని వస్తుంది.

నాన్న: కాబట్టి $3_4 — 1$ ఎంత?

రవి : $3^4 — 1 \equiv 0$ (మాపాంకము 5)

నాన్న: అంటే అర్థం ఏమిటి?

మధు : $3^4 — 1$ ని 5 తో భాగించవచ్చు.

నాన్న: మిగిలిన అర్ధవరుసలు ఉపయోగిస్తే ఏమి వస్తుంది?

రవి : $1^4 — 1$ ని 5 తో భాగించవచ్చు.

$2^4 — 1$ ని 5 తో భాగించవచ్చు.

$4^4 — 1$ ని 5 తో భాగించవచ్చు.

నాన్న: అభాజ్య సంఖ్య అయిన 7 మాపాంకము గుణన పట్టిక నుండి ఏ విషయాలు తెలుస్తాయి?

$1^6 — 1$ ని 7 తో భాగించవచ్చు.

$2^6 — 1$ ని 7 తో భాగించవచ్చు.

$3^6 — 1$ ని 7 తో భాగించవచ్చు.

$4^6 — 1$ ని 7 తో భాగించవచ్చు.

$5^6 — 1$ ని 7 తో భాగించవచ్చు.

$6^6 — 1$ ని 7 తో భాగించవచ్చు.

కానీ 7 తో $7^6 — 1$ భాగించలేం.

7 తో $8^6 — 1$ భాగించగలమా?

నాన్న: సమతేవ సంబంధం ఉపయోగించి ఈ విషయం తెలుసుకోలేమా?

మధు : నేను ప్రయత్నిస్తాను. $8^6 \equiv 1$ (మాపాంకము 7) అని నిరూపించాలి కదూ?

నాన్న: అవును.

మధు : $8 \equiv 1$ (మాపాంకము 7)

కాబట్టి $8^6 \equiv 1^6$ (మాపాంకము 7)

అంటే $8^6 \equiv 1$ (మాపాంకము 7) అవునా?

నాన్న: $9^6 — 1$ మాటేమిటి?

మధు : మొదట $9_6 — 1 \equiv 0$ (మాపాంకము 7) కరక్టేనా అని చూడాలి,

సరే. $9 \equiv 2$ (మాపాంకము 7)

కాబట్టి $9_6 \equiv 2^6$ (మాపాంకము 7)

$2^6 — 1$ ను 7తో భాగించవచ్చు. కాబట్టి $9^6 — 1$ను కూడా 7 తో భాగించవచ్చు.

నాన్న: దీని బట్టి మనకు వచ్చే సంఖ్యల లక్షణం ఏమిటి?

మధు : ఏదైనా ఒక అభాజ్య సంఖ్య, ఉదాహరణకు p ని తీసుకో. p గుణనం కాని సంఖ్య n ను ఎన్నుకో. అప్పుడు $n^{p-1} — 1$ ను pతో భాగించవచ్చు చక్కని విషయాన్ని కనుక్కున్నాం. దీన్ని మొట్టమొదటి సారి ఎవరు కనుగొన్నారు?

నాన్న: ఫెర్మా (fermot) అన్న ఫ్రెంచి గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు 17వ శతాబ్దంలో దీనిని కనిపెట్టారు.

సరే! నేను ఊరికి వెళుతున్నాను. 15 రోజులదాకా రాను. అంతలో మీరు కాలెండరులోని ఏ తేదీకైనా సరే వారం కనిపెట్టే విధానం గురించి ఆలోచించండి.

మధు : గ్రెగోరియన్ కాలెండరులోనా?

నాన్న: అవును. మనమిప్పుడు ఆ కాలెండరునే వాడుతున్నాం.

రవి : మీరు వచ్చేలోగా కనుక్కోడానికి ప్రయత్నిస్తాం.

సుధ : అంకగణితంలో ఎన్ని రకాలున్నాయి నాన్నా?

నాన్న : మీరు తెలుసుకున్న దాన్ని బట్టి అంకగణితం అనకూడదు. "అంకగణితాలు" అని అనాలి. మనకు ఎన్ని "అంకగణితాలు" కావాలో అన్ని అమర్చుకోవచ్చు.

మధు : కానీ క్షేత్రం, వలయం అని రెండు రూపాలే ఉన్నాయి.

నాన్న : నీవు సరిగ్గా చెప్పావు.

సుధ : అబ్బ ఎన్ని విషయాలు నేర్చుకున్నామో!

రవి : ఈ కాలెండరుతో చాలా సరదాగా సమయాన్ని గడిపాం.

మధు : అమ్మ బాబోయ్! కాలెండరులో ఇన్ని విషయాలు దాగున్నాయని ఇంతకు ముందు ఊహించలేదు.

పారిభాషిక పదజాలం

GLOSSARY

అకరణీయ సంఖ్య	Rational number
అంకగణితం	Arithmetic
అంకశ్రేఢి	Arithmetic progression
అంకె/సంఖ్య	Number
అడ్డ వరుస (వరస)	Row
అనంతం/అపరిమిత	Infinite
అనుబంధ లాటిన్ చతురస్రం	Auxiliary Latin square
అప్రదక్షిణ (అపసవ్య) దిశ	Anti-clock wise
అభాజ్య సంఖ్య	Prime number
అవరోహణ	Descending
అవశేషాలు	Residues
అసంపూర్ణ తమాషా చతురస్రం	Incomplete magic square
ఆధార అంకె	Basic number
ఆరోహణ	Ascending
ఉపసమితి	Sub-set
ఎన్నో-ఒకటి, ప్రతిసర్గనం	Many-one, onto mapping
క్రమపద్ధతి	Pattern
క్రమం (వరుస)	Sequence
కారణాంకాలు	Factors
కాలెండరు (పంచాంగం)	Calendar
కూడిక గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు	Cross puzzles
గణిత రూపాలు	Mathematical structures
గుణన పట్టిక	Multiplication table
గుణిజాలు	Multiples

ఘనం	Cube (of a number)
చతురస్రం (చదరం	Square
జత	Pair
తమాషా చతురస్రం	Magic square
తమాషా దీర్ఘ చతురస్రం	Magic rectangle
దీర్ఘ చతురస్రం	Rectangle
నక్షత్రపు గుర్తులో చిక్కు సమస్యలు	Star puzzles
నిలువు వరుస	Column
పరిమిత	Finite
పూరక జత	Complementary pair
పూరకాలు	Complements
పూర్ణ సంఖ్య/పూర్ణాంకం	Whole number
పూర్తి తమాషా చతురస్రం	Complete magic square
ప్రతిబింబం	Image
ప్రతి వర్తనం	Mapping
ప్రతిక్షేపణం	Replacement
ప్రదక్షిణ (సవ్య) దిశ	clock wise
ప్రదేశం	Domain
ప్రమేయ సంబంధం	Functional relation
బేసి సంఖ్య	Odd number
భాగఫలం	Quotient
భాగహారం	Division
భాజకం	Divisor
భాజ్యం	Dividend
భిన్నాంకం	Fraction number
మధ్య బిందువుల చతురస్రం	Mid point square

మాత్రిక	Matrix
మాపాంకము	Modulus (mod)
మూల అంకె	Root number
రూపాంతర ప్రవర్తన	Structural property
రెండు చివర్ల ఉన్న అంకెలు	End terms
లబ్ధం	Product
లాటిన్ చతురస్రం	Latin square
వర్గం	Square (of a number)
వర్గావ అవశేషాలు	Quadratic non-residues
వర్గావశేషాలు	Quadratic residues
వరుసగా	Consecutive
వలయం	Ring
వ్యతిరేకాలు	Opposite
వికర్ణం	Diagnol
విన్యాసం	Arrangement
విభాగం	Partitioning
వియుక్త ఉపసమితి	Disjoint
శేష సంఖ్య	Remainder number (R)
సగటు (మధ్యమం)	Mean
సంకలన క్రమం	Additive sequence
సంకలన పట్టిక	Addition table
సంకేతం	Notation
సంజ్ఞా సంఖ్యలు	Integers
సమ రూపత	Homo morphism
సమశేష సంబంధం	Congruence relation
సమసంఖ్య	Even number
సమ స్థలంలో ఉన్న అంకెలు	Equally placed numbers

సమానత సంబంధం	Equality relation
సమితి	Set
సమీకరణ	Equation
సంయుక్త సంఖ్య	Composite number
సర్వసమానం	Congruent
సహప్రదేశం	Co-domain
స్థాయి (క్రమం, తరగతి)	Order
సూత్రం	Formula
హెచ్చవేత/గుణకారం	Multiplication
క్షేత్రం	Field